



Technische Universität Ilmenau  
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften  
Fachgebiet Diskrete Mathematik und Algebra

**Abschlussarbeit**  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Master of Science

---

**Analyse eines den 4-Zusammenhang  
zertifizierenden Algorithmus**

---

**Florian Möller**

betreut von  
Uni Prof. rer. nat. habil. Matthias Kriesell

Ilmenau, den 5. März 2020

**URN:** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2020200377

**DOI:** 10.22032/dbt.45610

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1	Terminologie . . . . .	2
2.2	Zusammenhang und Kontraktion . . . . .	3
2.3	Graphenklassen . . . . .	4
2.4	Tiefensuche . . . . .	6
2.5	Zertifikate . . . . .	6
2.6	Einige Eigenschaften von 3-zusammenhängenden Graphen . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Graphen</b>	<b>11</b>
3.1	Ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Hamiltongraphen . . . . .	11
3.2	Ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Graphen . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Ein Zertifikat für 4-Zusammenhang</b>	<b>24</b>
4.1	Vorbereitungen . . . . .	24
4.2	Das Zertifikat für 4-Zusammenhang . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Ergebnisse und Ausblick</b>	<b>43</b>
5.1	Ergebnisse . . . . .	43
5.2	Ausblick . . . . .	43
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>44</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

---

Zertifikate sind in der Graphentheorie hilfreich um Eigenschaften von Graphen schnell nachweisen zu können. Ein Zertifikat ist dabei eine Ausgabe eines zertifizierenden Algorithmus und dient dem Nachweis der Korrektheit der Ausgabe. Beispielsweise haben McConnell, Mehlhorn, Näher und Schweitzer [7] für das Problem, herauszufinden, ob ein Graph mit zwei Farben vollständig gefärbt werden kann ein Zertifikat definiert. Somit konnten sie nachweisen ob der Graph bipartit ist. Dieses Problem konnte somit in  $O(n)$  Laufzeit gelöst werden.

Des Weiteren setzten sich Elmasry, Mehlhorn und Schmidt [3] mit 3-Zusammenhang in Hamiltongraphen auseinander und entwickelten ein Zertifikat, welches mittels eines Algorithmus in Laufzeit  $O(m + n)$  verifiziert, ob ein Hamiltongraph 3-zusammenhängend ist. Schmidt hat dies 2010 auf allgemeine Graphen mithilfe der Barnett-Grünbaum-Pfade erweitert [10]. Somit gibt es ein Zertifikat für 3-Zusammenhang in Graphen.

In dieser Arbeit beschäftigt uns die Frage: Kann man auch ein Zertifikat für 4-Zusammenhang aufstellen? Dabei stützen wir uns auf die Resultate der Arbeiten von Martinov [5], [6] und von Mader [4] bezüglich 4-zusammenhängender Graphen. Ziel ist es, einen vorgegebenen Graphen  $G$  aus einem kontraktionskritischen, 4-zusammenhängenden Ausgangsgraphen mittels einer Sequenz den 4-Zusammenhang erhaltenden Kantenexpansionen zu rekonstruieren. Nachdem wir die Klasse der kontraktionskritischen Graphen  $\Gamma_4$  mit der Hilfe von der Arbeit von Martinov [5] definiert haben, stellen wir einen Algorithmus auf, welcher uns eine Expansionsfolge erstellt. Diese wird dann aus der Klasse  $\Gamma_4$  einen beliebigen Graphen  $G$  darstellen, welcher zuvor vom Algorithmus betrachtet wurde. Danach untersuchen wir diesen Algorithmus darauf, ob dieser auch zertifizierend ist. Zum Abschluß werden die Ergebnisse dieser Arbeit betrachtet.

# Kapitel 2

## Grundlagen

---

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Definitionen und Notationen erklärt. Außerdem wird das Grundproblem des Zertifizierens behandelt und die ersten Sätze für 3-zusammenhängende Graphen bewiesen.

### 2.1 Terminologie

Wir beginnen dieses Kapitel mit den grundlegenden Terminologien aus der Graphentheorie. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Definitionen stammen aus dem Buch *Graphentheorie* von Diestel [1]. Ein **Graph** ist ein Paar  $G = (V(G), E(G))$ , wobei  $V(G)$  die **Eckenmenge** von  $G$  und  $E(G)$  die **Kantenmenge** von  $G$  bezeichnen. Eine Ecke  $v \in V(G)$  ist **inzident** zu einer Kante  $e \in E(G)$ , wenn  $v \in e$  gilt. Des Weiteren ist  $v$  zu einer Ecke  $w \neq v$  **adjazent**, sobald  $v$  und  $w$  durch eine Kante  $e$  verbunden sind, das heißt, dass  $e = vw \in E(G)$  gilt. Die beiden Ecken  $v, w$  werden dann als **Endecken** der Kante  $e$  bezeichnet. Zwei Kanten sind adjazent, wenn sie eine gemeinsame Endecke besitzen. Ein Graph  $H = (V(H), E(H))$  heißt **Untergraph** von  $G$ , falls die folgenden zwei Eigenschaften gelten:  $V(H) \subseteq V(G)$  und  $E(H) \subseteq E(G)$ . Für  $X \subseteq V(G)$  sei  $G[X]$  der Untergraph von  $G$  mit der Eckenmenge  $X$  und der Kantenmenge  $E_G(X, X)$ , wobei  $E_G(X, X)$  die Menge aller Kanten aus  $E(G)$  beschreibt, deren beide Endecken in  $X$  liegen. Wir nennen  $G[X]$  den von  $X$  **induzierten Untergraph** von  $G$ . Ein **Pfad** ist ein Teilgraph  $P$  von  $G$  mit der Eckenmenge  $V(P) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$  mit  $\ell \geq 0$  und der Kantenmenge  $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{\ell-1}x_\ell\}$ , wobei die  $x_i$  paarweise verschieden sind. Ein **Kreis** in einem Graphen  $G$  ist dabei ein Pfad, welcher die gleichen Endecken besitzt. Die **Nachbarschaft** einer Ecke  $v \in V(G)$  ist die Menge aller zu  $v$  adjazenten Ecken. Wir bezeichnen diese mit  $N_G(v)$ . Im Folgenden sei  $E_G(v)$  die Menge aller zu  $v$  inzidenten Kanten. Der **Grad** der Ecke  $v$  in  $G$  ist  $d_G(v) = |E_G(v)|$ . Insbesondere ist der

**Maximalgrad** eines Graphen

$$\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Der **Minimalgrad** wird dann wie folgt definiert:

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Gilt  $d_G(v) = k$  für alle  $v \in V(G)$ , so heißt  $G$  **k-regulär**. Es sei  $X \subseteq V(G)$ . Der Graph, der durch Löschen der Eckenmenge  $X$  aus  $G$  entsteht, ist definiert durch  $G - X = G[V(G) \setminus X]$ . Besteht  $X$  nur aus einer Ecke  $v$ , so schreiben wir kurz  $G - v$ . Für die Löschung einer Kantenmenge  $F \subseteq E(G)$  gilt  $G - F = (V(G), E(G) \setminus F)$ . Enthält  $F$  nur eine Kante  $e$ , so schreiben wir kurz  $G - e$ . Nun können wir auch die **Unterteilung**  $U$  eines Graphen  $G$  definieren. Eine Unterteilung  $U$  von  $G$  entsteht aus  $G$ , indem beliebig viele Kanten  $e \in E(G)$  aus  $G$  durch Pfade ersetzt werden, deren Endknoten aus  $e$  stammen und welche keine weiteren Ecken von  $V(G)$  und keine Ecken von anderen Pfaden enthalten.

## 2.2 Zusammenhang und Kontraktion

Ein Graph  $G$  ist **zusammenhängend**, wenn je zwei Ecken in  $G$  durch einen Pfad verbunden sind. Ein Graph ist **k-zusammenhängend** mit  $k \in \mathbb{N}$ , wenn  $|V(G)| > k$  ist und durch Löschen von je  $k - 1$  Ecken der Graph zusammenhängend bleibt. Das größte solche  $k$ , für welches  $G$   $k$ -zusammenhängend jedoch nicht  $k + 1$ -zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhangszahl** und wird mit  $\kappa(G)$  bezeichnet. Eine **Komponente** von  $G$  ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von  $G$ . Wir definieren eine Menge von Ecken  $T$  als **Trenner** oder **trennende Eckenmenge** von  $G$ , wenn  $G - T$  mehr Komponenten als  $G$  besitzt. Eine trennende Eckenmenge  $T$  mit  $k$  Elementen wird auch als **k-Trenner** bezeichnet. Ist  $G$   $k$ -zusammenhängend und  $T$  ein  $k$ -Trenner von  $G$ , dann wird jede Vereinigung wenigstens einer aber nicht aller Komponenten von  $G - T$  als **k-Fragment bezüglich  $T$**  bezeichnet. Es sei nun  $H$  ein  $k$ -Fragment bezüglich  $T$ . Der Untergraph von  $G$ , welcher durch  $V(H) \cup T$  induziert wird, heißt **abgeschlossenes k-Fragment**.

Neben dem Zusammenhang benötigen wir auch das Konzept des Kontrahierens einer Kante. Es sei  $G$  ein Graph und  $e = xy \in E(G)$ . Der Graph  $\tilde{G}$  entstehe aus dem Graphen  $G$ , indem die Ecken  $x$  und  $y$  als eine neue Ecke  $v_{x,y}$  identifiziert werden. Das heißt, dass  $v_{x,y}$  dieselben adjazenten Ecken wie  $x$  und  $y$  (bis auf  $x$  und  $y$ ) besitzt. Dabei wird die Kante  $e$  sowie alle parallelen Kanten im neu entstandenen Graphen gelöscht. Wir definieren diese Zusammenfassung zweier Ecken entlang einer bestimmten Kante als **Kontraktion**. Dies ist auch in der Abbildung (2.1) dargestellt. Ein Graph, der aus  $G$  entsteht, indem die Kante

$e = xy$  kontrahiert wurde, wird mit  $G/xy$  oder  $G/e$  bezeichnet.

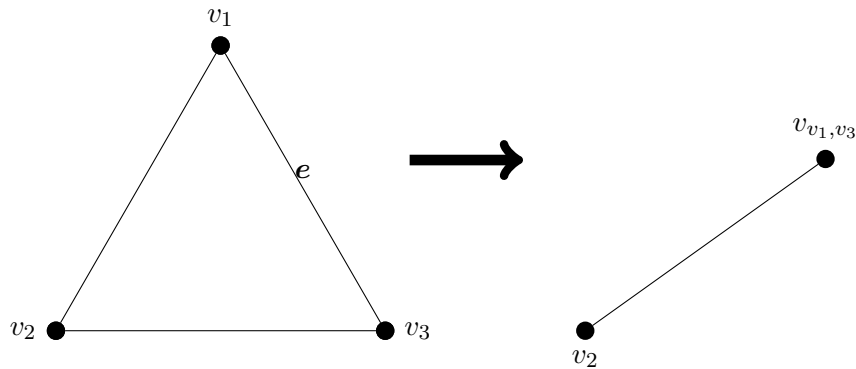


Abbildung 2.1: Kontraktion der Kante  $e$

## 2.3 Graphenklassen

Wir betrachten in diesem Abschnitt spezielle Graphen, die sich durch Eigenschaften zu einer Klasse von Graphen zusammenfassen lassen. Eine **Graphenklasse** ist eine Menge von Graphen, welche unter Isomorphie abgeschlossen ist. Als Erstes betrachten wir die Klasse der **Kantengraphen**. Es sei  $G$  ein Graph. Dann ist der **Kantengraph** (engl. line graph)  $L(G)$  von  $G$  der Graph mit Eckenmenge  $E(G)$  und Kantenmenge

$$E(L(G)) = \{\{e, e'\} \subseteq E(G) \mid e \text{ und } e' \text{ sind in } G \text{ adjazent}\}.$$

In den Abbildungen 2.2 und 2.3 wird anhand des Beispiels die Theorie veranschaulicht.

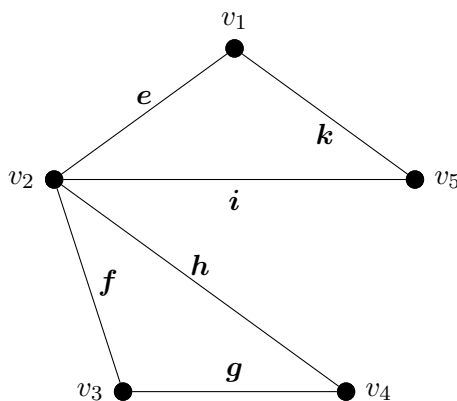


Abbildung 2.2: Ein Graph  $G$

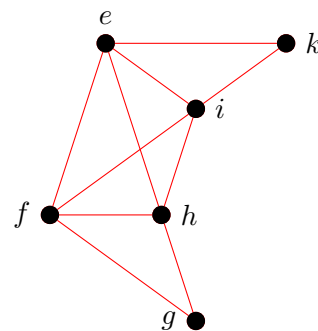


Abbildung 2.3: Der Kantengraph  $L(G)$  von  $G$

Die Klasse der Kantengraphen wird in Kapitel 4 bei den Theoremen von Mader eine

große Rolle spielen. Eine weitere Graphenklasse ist die Klasse der **Hamiltongraphen**. Ein Graph  $G$  ist ein **Hamiltongraph**, wenn es in ihm einen Kreis gibt, der alle Knoten aus  $V(G)$  enthält. Dieser Kreis wird auch als **Hamiltonkreis** bezeichnet. Man nennt Graphen mit dieser Eigenschaft auch **hamiltonisch**. Ein **Hamiltonpfad** ist ein Pfad, welcher alle Knoten von den Hamiltongraph  $G$  enthält, jedoch keinen Kreis schließt. Das bedeutet, dass jeder Hamiltonkreis einen Hamiltonpfad enthält.

Für die Arbeit brauchen wir eine weitere Eigenschaft von Graphen, mittels der wir eine weitere Graphenklasse definieren können. Ein Graph  $G$  ist **kontraktionskritisch**, wenn durch Kontraktion jeder beliebigen Kante  $e$  die Zusammenhangszahl von  $G - e$  kleiner oder gleich  $\kappa(G) - 1$  ist. Wir definieren  $\Gamma_k$  als die **Menge der kontraktionskritischen Graphen** mit  $\kappa(G) = k$ . Ein Graph  $G$  ist **kritisch**, falls für eine Kante  $e \in E(G)$  gilt, dass  $\kappa(G - e) = \kappa(G) - 1$  ist. Ein Graph  $G$  ist dann  **$\ell$ -kritisch**, wenn für alle Mengen  $|X| \subseteq V(G)$  mit  $|X| \leq \ell$  gilt, dass  $\kappa(G - X) = \kappa(G) - |X|$  ist. Für die folgenden zwei Klassen, welche bereits von Mader [4] benutzt und definiert wurden, betrachten wir Graphen, welche  $\ell$ -kritisch und  $k$ -zusammenhängend sind. Diese werden als  **$(k, \ell)$ -Graphen** bezeichnet. Für die nächsten Klassen von Graphen definieren wir  $N_m$  wie folgt:

$$N_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq m\}.$$

Die erste Klasse  $H_m(k)$  beinhaltet alle Graphen  $G$  mit Eckenmenge

$$V(G) = N_m$$

und Kantenmenge

$$E(G) = \{vw \mid w = v + \ell \text{ mit } v \in N_m \text{ und } 1 \leq \ell \leq k\}.$$

Für alle Graphen  $G \in H_m(k)$  gilt dann, dass  $G$  ein  $(2k, 2)$ -Graph für alle  $k$  und  $m$  mit  $\frac{m}{2} > k \geq 2$  ist (ohne Beweis).

Die zweite Klasse  $W_m(k)$  enthält alle Graphen mit der Eckenmenge

$$V(G) = N_m^k$$

und der Kantenmenge

$$E(G) = \{vw \mid v \in V(G), w \in V(G) \text{ mit } v_\ell \neq w_\ell \text{ und } v_\ell = w_\ell \text{ für } \ell \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Hier gilt für alle Graphen  $G \in W_m(k)$ , dass  $G$  ein  $(m^k - (m - 1)^k - 1, k)$ -Graph ist (ohne Beweis). Insbesondere bedeutet dies, dass  $H_m(2)$  für  $m \geq 5$  und  $W_3(2) = L(K_{3,3})$  Klassen von  $(4, 2)$ -Graphen sind.

## 2.4 Tiefensuche

In diesem Kapitel wird das Verfahren der Tiefensuche genauer betrachtet. Die **Tiefensuche** (engl. Depth-First-Search, kurz DFS) ist ein Verfahren zum Traversieren von Graphen, das vielfältige Anwendung in der Graphentheorie und auch in der Informatik hat. Wir beschreiben im Folgenden algorithmisch die Tiefensuche. Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $r$  eine beliebige, aber fest gewählte Ecke aus  $V(G)$ . Alle Ecken aus  $V(G)$  bis auf  $r$  erhalten den Zustand „nicht besucht“. Wir betrachten ausgehend von der Ecke  $r$  die Nachbarschaft  $N_G(r)$ . Dabei besuche in jedem Schritt, wenn möglich, eine noch nicht besuchte benachbarte Ecke ausgehend von der zuletzt besuchten Ecke. Ist dies nicht mehr möglich, so gehe zurück entlang der Kante, durch welche die gegenwärtige Ecke erstmals besucht wurde. Dies wird solange wiederholt, bis alle Ecken von  $G$  besucht wurden. Dabei sei  $F$  die Menge der abgelaufenen Kanten. Dadurch entsteht ein Baum  $G_T = (V(G), F)$ , welcher auch als **Tiefensuchbaum** bezeichnet wird. Durch Umbenennung der Ecken erhalten wir  $V(G_T) = \{1, 2, \dots, n\}$ , wobei die Nummerierung der Ablaufreihenfolge der Tiefensuche entsprechend gewählt sei. Diese Nummerierung wird auch als **depth first index (kurz DFI)** bezeichnet. Wir nennen eine Ecke  $v$  **höher** als eine Ecke  $w$  oder **über** einer Ecke  $w$  (mit Bezug zu  $G_T$ ), wenn gilt:  $v < w$ . In dem Tiefensuchbaum  $G_T$  sind nur Kanten  $xy$  zugelassen, für die gilt, dass  $x$  über  $y$  liegt. Diese Kanten werden auch als **Baumkanten** bezeichnet. Eine **Rückwärtskante** ist dabei definiert als eine Kante  $uv \in E(G)$  mit  $u \geq v + 1$  in der DFI-Reihenfolge. Des Weiteren ist eine **äußere Kante** eine Kante  $e \in E(G)$ , welche im Tiefensuchbaum nicht betrachtet wird. Insbesondere sind Rückwärtskanten auch äußere Kanten. Als Nächstes wollen wir das Prinzip des Zertifizierens betrachten.

## 2.5 Zertifikate

Ein Algorithmus ist eine Folge von Vorschriften, die zu einer gegebenen Eingabe  $x$  eine Ausgabe  $y$  liefert. Ein **zertifizierender Algorithmus** liefert zu jeder Eingabe  $x$  eine Ausgabe  $y$  und zusätzlich noch ein Zertifikat  $w$ , welches die Korrektheit jeder Ausgabe bestätigt. Dabei soll dieser Algorithmus möglichst geringe Laufzeit besitzen. Wir betrachten folgendes Beispiel zusammen mit dem zertifizierenden Algorithmus, welchen McConnell, Mehlhorn, Näher und Schweitzer behandelt haben [7]. Im Folgenden sei  $G$  ein Graph. Eine **Färbung**  $c$  von  $G$  mit Farbmenge  $F$  ist eine Abbildung  $c : V(G) \rightarrow F$  mit  $c(v) \neq c(w)$  für alle  $vw \in E(G)$ , das heißt, adjazente Ecken bekommen unterschiedliche Farben zugewiesen. In der Graphentheorie wird häufig untersucht, wie viele Farben man höchstens braucht um einen Graphen zu färben. Für unser Beispiel betrachten wir eine Menge  $F$  mit zwei Elementen. Wir wollen nun Graphen auf Bipartitheit untersuchen. Ein Graph  $G$  heißt **bipartit**, wenn seine Eckenmenge mit zwei Farben gefärbt werden kann. Dazu definieren wir uns die



Funktion ist bipartit:  $\mathcal{G} \rightarrow \{0, 1\}$ , wobei  $\mathcal{G}$  die Klasse aller endlichen Graphen bezeichnet. Diese Funktion gebe 1 aus, wenn der Graph bipartit ist, andernfalls gibt sie 0 aus. Der Satz von König besagt, dass ein Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält. Um zu zertifizieren, dass ein Graph  $G$  nicht bipartit ist, reicht es somit aus, einen Kreis ungerader Länge in  $G$  anzugeben. Im Folgenden wird der zertifizierende Algorithmus für das Problem der Bipartitheit definiert: Es sei  $F = \{\text{rot}, \text{blau}\}$ . Wir definieren den Zustand einer Ecke als 0, wenn sie noch vom Algorithmus bearbeitet wird und als 1, wenn sie vom Algorithmus nicht mehr betrachtet wird. Des Weiteren hat zu Beginn des Algorithmus jede Ecke den Zustand „noch nicht besucht“. Es sei  $G$  ein zusammenhängender Graph und  $r$  eine beliebige, aber fest gewählte Ecke.

- (1) Färbe  $r$  mit der Farbe rot. Wir setzen den Zustand der Ecke  $r$  auf 1. Färbe alle Nachbarn von  $r$  mit der Farbe blau und setze ihren Zustand auf 0.
- (2) Solange es noch Ecken mit Zustand 0 gibt: Wähle eine Ecke  $w \in V(G)$ , welche den Zustand 0 besitzt und setze sie auf Zustand 1. Färbe alle ungefärbten Ecken aus der Nachbarschaft von  $w$  mit der Farbe, in welcher  $w$  nicht gefärbt ist, und setze ihren Zustand auf 0. Speichere für jede Ecke  $l$ , die neu eingefärbt wurde, die Ecke ab, von der aus die Färbung für  $l$  gewählt wurde. Bei wiederholter Anwendung von diesem Schritt erhält jede Ecke eine Farbe da  $G$  zusammenhängend ist.
- (3) Überprüfe alle Kanten von  $E(G)$  und deren Endecken. Haben alle Endecken von allen Kanten  $e \in E(G)$  unterschiedliche Farben, so ist der Graph bipartit. Andernfalls existiert mindestens eine Kante  $e = (u, w)$ , wobei die Farbe von  $u$  dieselbe ist wie die Farbe von  $w$ . Folge den Pfaden entlang der abgespeicherten Information der Ecke von  $u$  nach  $r$  und von  $w$  nach  $r$ . Diese Pfade werden mit  $p_u$  und  $p_w$  bezeichnet. Diese Pfade treffen in einer Ecke  $v$  aufeinander, im Extremfall gilt  $v = r$ . Da  $p_u$  und  $p_w$  alternierend gefärbt sind, folgt, dass die Längen von  $p_u$  und  $p_w$  dieselbe Parität haben. Somit bilden diese zusammen mit der Kante  $e$  einen ungeraden Kreis.

Wir haben nun einen Algorithmus zum Überprüfen der Bipartitheit eines Graphens, welcher zusätzlich im dritten Schritt ein Zertifikat ausgibt. Dabei ist ein Kreis ungerader Länge ein Zertifikat für die nicht-Bipartitheit und die unterschiedliche Färbung der Endecken von allen Kanten aus  $E(G)$  für die Bipartitheit eines Graphens  $G$ .

## 2.6 Einige Eigenschaften von 3-zusammenhängenden Graphen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige nützliche Sätze, die als Vorbereitung für ein Zertifikat für den 3-Zusammenhang dienen. Diese Sätze und ihre Beweise stammen aus der Arbeit von Elmasry, Mehlhorn und Schmidt [3]. Zuerst betrachten wir jedoch einen Satz aus

einer Arbeit von Tutte [11]. Dazu benötigen wir noch die Definition einer kontrahierbaren Kante. Die Kante  $e \in E(G)$  ist eine **kontrahierbare Kante**, wenn durch Kontraktion von  $e$  die Zusammenhangszahl des Graphens nicht sinkt.

**Satz 2.1.** *Jeder 3-zusammenhängende Graph mit wenigstens 5 Ecken enthält eine kontrahierbare Kante.*

Den Beweis kann man in [11] nachvollziehen. Nun können wir folgendes Lemma angeben.

**Lemma 2.2.** *Es sei  $G$  ein Graph mit  $\delta(G) \geq 3$ , wobei  $|V(G)| \geq 5$  und  $xy \in E(G)$  eine beliebig gewählte, kontrahierbare Kante ist. Wenn  $G$  nicht 3-zusammenhängend ist, dann ist  $G/xy$  nicht 3-zusammenhängend.*

**Beweis:** Es sei  $G$  ein Graph, welcher nicht 3-zusammenhängend ist. Durch Kontraktion der kontrahierbaren Kante  $xy$  in  $G$  entsteht eine Ecke  $v_{x,y}$ . Wir betrachten den Fall  $d(v_{x,y}) \leq 2$ . Somit entsteht in  $\tilde{G} = G/xy$  ein Trenner  $T$ , welcher  $v_{x,y}$  isoliert. Daraus folgt, dass  $\tilde{G}$  nicht 3-zusammenhängend ist. Wir nehmen nun an, dass  $d(v_{x,y}) \geq 3$  gilt. Es sei  $\tilde{G} = G/xy$  und es sei  $T = \{a, b\}$  eine trennende Eckenmenge von  $G$ . Dann hat jede Komponente von  $G - T$  mindestens zwei Ecken, da  $\delta(G) \geq 3$  ist. Wir betrachten folgende Fallunterscheidung:

**Fall 1:**  $T = \{x, y\}$ . Dann ist  $v_{x,y}$  eine trennende Ecke in  $\tilde{G}$  und somit ist  $\tilde{G}$  nicht 3-zusammenhängend.

**Fall 2:**  $T \cap \{x, y\} = \emptyset$ . Da in  $G$  die trennende Eckenmenge  $T = \{a, b\}$  existiert und  $T \cap \{x, y\} = \emptyset$  gilt, existieren mindestens zwei Komponenten  $C_1$  und  $C_2$ , wobei in einer dieser Komponenten sowohl  $x$ , als auch  $y$  liegen. Durch Kontraktion der Kante  $xy$  liegt die neu entstandene Ecke  $v_{x,y}$  in der gleichen Komponente wie  $x$  und  $y$ . Dadurch existieren zwei Komponenten in  $\tilde{G}$ , welche durch den Trenner  $T = \{a, b\}$  getrennt werden. Somit ist  $\tilde{G}$  nicht 3-zusammenhängend.

**Fall 3:**  $T = \{x, b\}$ , mit  $b \neq y$ . Der Trenner teilt den Graphen  $G$  in mindestens zwei Komponenten  $C_1$  und  $C_2$ , wobei  $y$  in  $C_1$  liege (der Fall  $y \in C_2$  funktioniert analog). Da  $d_G(y) \geq 3$ , liegt in  $C_1$  mindestens eine weitere Ecke  $w \in V(G)$ . Nach der Kontraktion der Kante  $xy$  entsteht die neue Ecke  $v_{x,y}$ . Es sei nun  $\tilde{T} = \{v_{x,y}, b\}$ . Da  $w$  nicht in  $C_2$  liegt, zerfällt  $\tilde{G} - \tilde{T}$  in zwei Komponenten, da  $V(C_1) \cap V(\tilde{G} - \tilde{T})$  nicht leer ist. Somit ist  $\tilde{G}$  nicht 3-zusammenhängend. Der Fall  $T = \{y, b\}$  mit  $b \neq x$  geht analog.

Es sei nun  $T = \{c\}$  eine trennende Eckenmenge von  $G$ . Wir betrachten dazu folgende zwei Fälle:

**Fall 4:**  $T \cap \{x, y\} = \emptyset$ . Dieser Fall folgt analog zu den Fall 2.

**Fall 5:**  $T \cap \{x, y\} \neq \emptyset$ . Nach Kontraktion der Kante  $xy$  entsteht in  $\tilde{G}$  die trennende Eckenmenge  $T = \{v_{x,y}\}$ . Somit ist  $\tilde{G}$  nicht 3-zusammenhängend.

■

**Satz 2.3.** *Es sei  $G_0 = G$  und  $G_1, G_2, \dots, G_\ell = K_4$  eine Folge von Graphen, für die gilt, dass  $G_i$  aus  $G_{i-1}$  durch Kontraktion einer kontrahierbaren Kante  $e \in E(G_{i-1})$  entsteht. Gilt  $\delta(G_i) \geq 3$  für alle  $i \in \{0, 1, 2, \dots, \ell\}$ , so ist  $G$  3-zusammenhängend.*

**Beweis:** Angenommen,  $G_0 = G$  wäre nicht 3-zusammenhängend. Dann ist nach dem vorangegangenen Lemma  $G_1$  auch nicht 3-zusammenhängend. Setzt man dies nun induktiv bis  $G_\ell = K_4$  fort, so folgt, dass  $K_4$  nicht 3-zusammenhängend ist, ein Widerspruch. ■

Im folgenden Satz wird die Tutte Kontraktionsfolge definiert.

**Satz 2.4.** *Es sei wie im vorangegangenen Satz  $G_0 = G$  und  $G_1, G_2, \dots, G_\ell = K_4$  eine Folge von Graphen, für die gilt, dass für alle  $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$   $G_i$  aus  $G_{i-1}$  durch Kontraktion einer Kante  $xy \in E(G_{i-1})$  mit  $\min\{d_{G_{i-1}}(x), d_{G_{i-1}}(y)\} \geq 3$  entsteht. Dann ist  $G$  3-zusammenhängend.*

**Beweis:** Wir müssen nur zeigen, dass jedes  $G_i$  Minimalgrad  $\delta(G_i) \geq 3$  hat, dann folgt die Behauptung aus Satz 2.3. Dazu nehmen wir indirekt an, dass ein  $i$  existiert, so dass  $\delta(G_i) < 3$  gilt. Da  $G_\ell = K_4$  ist, existiert dann mindestens ein  $j$  mit  $0 \leq j \leq \ell - 1$  so, dass  $\delta(G_{j+1}) \geq 3$  und  $\delta(G_j) \leq 2$  ist. Es sei nun  $v$  eine Ecke aus  $V(G_j)$  mit  $d_{G_j}(v) \leq 2$  und  $e \in E(G_j)$ , so, dass  $G_{j+1} = G_j/e$ . Dann gilt, dass  $e$  nicht inzident zu  $v$  ist (da sonst  $d_{G_j}(v) > 2$  sein müsste). Somit liegt  $v$  in  $V(G_{j+1})$ . Daraus folgt, dass  $\delta(G_{j+1}) \leq 2$  ist, ein Widerspruch. ■

Die in Satz (2.4) definierte Sequenz wird auch **Tutte-Kontraktionsfolge** genannt. Im Folgenden bezeichne  $G_T$  immer einen beliebigen, aber fest gewählten Tiefensuchbaum mit Eckenmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$ , welche entsprechend der Tiefensuche geordnet ist. Wir betrachten nun folgendes Lemma.

**Lemma 2.5.** *Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Hamiltongraph mit mindestens 5 Ecken. Des Weiteren sei der Tiefensuchbaum  $G_T$  so gewählt, dass er ein Hamiltonpfad in  $G$  ist und die Kante  $(n, 1)$  in  $G$  enthalten ist. Dann gibt es mindestens eine Baumkante, welche in  $G$  kontrahierbar ist.*

**Beweis:** Wir beweisen diese Aussage indirekt. Angenommen, es existiert keine solche Baumkante. Dann gilt für alle Baumkanten  $xy$  in  $G_T$ , dass eine Ecke  $z \in V(G_T)$  so existiert, dass die Menge  $\{x, y, z\}$  ein 3-Trenner des Graphen  $G$  ist (da  $xy$  nicht kontrahierbar ist). Da  $G_T$  ein Hamiltonpfad ist, können wir  $y = x + 1$  voraussetzen. Es sei

$$D_{x,y,z} = \begin{cases} \{z + 1, z + 2, \dots, x - 1\}, & \text{wenn } z < x \\ \{y + 1, y + 2, \dots, z - 1\}, & \text{wenn } z > y \end{cases}$$

Wir wählen nun eine Baumkante  $e = xy$  von  $G_T$  mit einer Ecke  $z$  von  $G_T$  so, dass  $D := D_{x,y,z}$  minimale Kardinalität hat. Es sei  $z > y$  (der Fall  $z < x$  funktioniert analog). Wir betrachten die Ecke  $v = z - 1$ . Dann ist  $vz$  eine Baumkante in  $G_T$ . Insbesondere liegen alle Nachbarn von  $v$ , abgesehen von  $z$ , in  $D$ , da sonst  $G - \{x, y, z\}$  zusammenhängend wäre. Da  $vz$  nicht kontrahierbar ist, existiert eine Ecke  $w$  so, dass  $\{v, z, w\}$  ein Trenner in  $G$  ist. Da  $x$  und  $y$  benachbart sind, gibt es eine Komponente  $C$  von  $G - \{v, z, w\}$  welche weder  $x$  noch  $y$  enthält (sonst wäre  $\{v, z, w\}$  kein Trenner). Diese Komponente muss jedoch einen Nachbarn von  $v$  enthalten, da sonst bereits  $\{z, w\}$  ein 2-Trenner von  $G$  wäre. Wie bereits festgestellt, liegt dieser Nachbar in  $D$ . Somit erreicht  $v$  durch Pfade aus  $G$ , welche  $x, y$  und  $z$  vermeiden, alle Ecken aus  $C$ . Folglich muss  $w \in D \cup \{y\}$  gelten und somit  $C \subseteq D$ . Dann ist aber  $D_{v,z,w} = \{w + 1, w + 2, \dots, v - 1\} \subset D_{x,y,z}$ , ein Widerspruch.

■

# Kapitel 3

## Ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Graphen

---

Bevor wir zum Hauptresultat der Arbeit kommen, betrachten wir ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Graphen. Dafür untersuchen wir insbesondere die Ergebnisse der Arbeit von Elmasry, Mehlhorn und Schmidt mit den Titel „An  $O(m + n)$  Certifying Triconnectivity Algorithm for Hamiltonian Graphs“ [3] und der Arbeit von Schmidt „Structure and Constructions of 3-Connected Graphs“ [10].

### 3.1 Ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Hamiltongraphen

Wir definieren nun ein Zertifikat für den 3-Zusammenhang in einem beliebigen Graphen wie in [3]. Die Idee dabei ist, dass die Tutte-Kontraktionsfolge als Zertifikat dient. Zunächst betrachten wir ein Lemma, welches uns beschreibt, welche Kanten nach einer Kontraktion kontrahierbar sind. Wir definieren für dieses Lemma eine Funktion  $S_{x,y} : V(G) \rightarrow V(\tilde{G})$ , wobei  $\tilde{G}$  der Graph ist, welcher aus  $G$  durch Kontraktion einer Kante  $e = xy$  entsteht. Die Funktion  $S$  gibt dann für  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Ausgaben  $S(x) := S(y) := v_{x,y}$  und  $S(z) := z$  für  $z \notin \{x, y\}$  wieder.

**Lemma 3.1.** *Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Hamiltongraph. Es sei  $G_T$  ein Tiefensuchbaum von  $G$ , welcher so gewählt ist, dass  $G_T$  auch ein Hamiltonpfad mit der Rückwärtskante  $(n, 1)$  ist. Für  $i, j \in \{1, \dots, n\} = V(G_T)$  sei  $(i, i + 1)$  eine kontrahierbare Kante und  $(j, j + 1)$  eine nicht kontrahierbare Kante von  $G$ . Wenn  $(S_{i,i+1}(j), S_{i,i+1}(j + 1))$  nach der Kontraktion von  $(i, i + 1)$  kontrahierbar ist, dann gilt, dass  $j \in \{i - 2, i - 1, i + 1, i + 2\}$  ist.*

**Beweis:** Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Hamiltongraph und  $G_T$  ein Tiefensuchbaum, der auch ein Hamiltonpfad mit der Rückwärtskante  $(n, 1)$  ist. Da  $(j, j + 1)$  eine nicht kontrahierbare Kante ist, folgt, dass  $j$  und  $j + 1$  in einen 3-Trenner von  $G$  enthalten sind. Es

sei  $T = \{j, j+1, z\}$  dieser Trenner für eine Ecke  $z \in V(G)$  mit  $j+1 < z$  (der Fall  $j > z$  folgt analog). Des Weiteren können nicht beide Ecken  $i$  und  $i+1$  in  $T$  liegen, da  $(i, i+1)$  kontrahierbar ist. Somit hat  $S_{ii+1}(T)$  Mächtigkeit 3. Die Eckenmengen  $V(C_1)$  und  $V(C_2)$  seien zwei Komponenten von  $G - T$  mit den Eckenmengen

$$V(C_1) = \{j+2, \dots, z-1\}$$

und

$$V(C_2) = \{z+1, \dots, n, 1, \dots, j-1\}$$

Wir betrachten die Mengen

$$\{S_{i,i+1}(a) | a \in C_\ell\} \setminus S_{i,i+1}(T) \text{ für } \ell = 1, 2.$$

Um das Lemma zu zeigen nehmen wir an, dass die Kante  $(S_{ii+1}(j), S_{ii+1}(j+1))$  nach der Kontraktion von  $(i, i+1)$  kontrahierbar ist. Sind beide Mengen nicht leer, dann muss  $S_{ii+1}(T) = \{S_{ii+1}(j), S_{ii+1}(j+1), S_{ii+1}(z)\}$  ein 3-Trenner sein. Daraus folgt, dass die Kante  $(S_{ii+1}(j), S_{ii+1}(j+1))$  nicht kontrahierbar ist, ein Widerspruch. Somit muss eine der beiden Mengen von  $\tilde{G} - S_{ii+1}(T)$  leer sein. Das bedeutet, dass  $C_1$  oder  $C_2$  nur ein Element in  $G$  besitzen. Angenommen  $|C_1| = 1$  (der Fall  $|C_2| = 1$  folgt analog). Dann muss jedoch  $i$  oder  $i+1$  in  $C_1$  liegen. Daraus folgt, dass entweder  $i$  oder  $i+1$  in  $T$  liegen. Somit ist  $i$  oder  $i+1$  ein Nachbar von  $j$  und  $j+1$ , da für den 3-Zusammenhang  $d_G(i) \geq 3$  gelten muss. Das bedeutet dass  $j+1 = i-1$  oder  $j+1 = i$  ist. Daraus folgt, dass  $j \in \{i-2, i-1\}$  liegt. Falls  $|C_2| = 1$  ist, folgt analog, dass  $j \in \{i+1, i+2\}$  ist. Somit gilt  $j \in \{i-2, i-1, i+1, i+2\}$ . ■

Aus dem Lemma folgt nun, dass nur Kanten aus der Nachbarschaft einer kontrahierbaren Kante nach der Kontraktion kontrahierbar werden können, wenn sie zuvor noch nicht kontrahierbar waren.

Es sei im Folgenden  $G$  ein Hamiltongraph und  $G_T$  ein Tiefensuchbaum zu  $G$ , der ein Hamiltonpfad ist.

**Lemma 3.2.** *Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Hamiltongraph. Des Weiteren sei  $G_T$  ein Tiefensuchbaum von  $G$ , der ein Hamiltonpfad ist, und die Kante  $(n, 1)$  existiere in  $G$ . Es sei  $xy$  eine Baumkante mit  $y = x+1$  und es sei  $z < x$ . Dann trennt die Menge  $\{x, y, z\}$  den Graphen  $G$  genau dann, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

- (a)  $z < x-1$  und
- (b)  $z > 1$ , wenn  $y = n$ , und

(c) wenn es keine Rückwärtskante  $uv$  mit  $u > v$  gibt, für die eine der folgenden Aussagen gilt:

(c1)  $u > y$  und  $z < v < x$

(c2)  $z < u < x$  und  $y < v < z$

**Beweis:** Wir beweisen zunächst, dass (a), (b) und (c) gelten, falls es ein  $z < x$  gibt, so dass  $\{x, y, z\}$  den Graphen trennt. Dazu sei  $T = \{x, y, z\}$  eine trennende Eckenmenge mit  $z < x$  und  $y = x + 1$ . Dann bestehen die Komponenten  $C_1$  und  $C_2$  von  $G - T$  aus den Eckenmengen

$$V(C_1) = \{z + 1, z + 2, \dots, x - 1\}$$

und

$$V(C_2) = \{x + 2, \dots, n, 1, \dots, z - 1\}.$$

Angenommen, (a) gelte nicht. Dann gilt, dass  $z \geq x - 1$  ist. Da jedoch  $x$  und  $z$  in  $T$  liegen und  $T$  ein 3-Trenner ist, gilt insbesondere, dass  $z \neq x$  ist. Nach Voraussetzung gilt zudem, dass  $z < x$  ist. Somit ist  $z = x - 1$  und  $T = \{x, y, z\}$  keine trennende Eckenmenge, ein Widerspruch. Somit gilt (a). Wir nehmen nun an, dass (b) nicht gilt. Das bedeutet, für  $y = n$  gilt, dass  $z = 1$  ist. Durch die Definition von  $G_T$  ist dann  $z$  ein Nachbar von  $y$ . Das bedeutet jedoch, dass die Menge  $C_2$  leer ist. Somit ist  $T$  kein 3-Trenner, ein Widerspruch. Somit gilt auch (b) und wir müssen nur noch (c) zeigen. Dazu nehmen wir indirekt an, dass es eine Rückwärtskante  $uv$  mit  $u > v$  gibt, für die (c1) oder (c2) gilt. Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $y \neq n$  gilt, das heißt, es existiert ein  $v > y$  in  $G_T$ .

Dadurch, dass  $u > v$  ist, sind diese beiden Ecken nicht benachbart. Somit kann die Rückwärtskante  $uv$  nicht die Kante zwischen  $n$  und  $1$  sein. Nach (c1) liegt  $u \in V(C_2)$  und  $v \in V(C_1)$ . Somit verbindet die Rückwärtskante  $uv$  die beiden Komponenten in  $G$ , ein Widerspruch. Nach (c2) liegt  $u \in V(C_1)$  und  $v \in V(C_2)$ . Daraus folgt, dass  $uv$  die Komponenten  $C_1$  und  $C_2$  in  $G$  verbindet, ein Widerspruch. Somit kann es keine Rückwärtskante  $uv$  geben für die (c1) und (c2) gilt.

Für die Ecken  $x$ ,  $y$  und  $z$  aus  $T$  gilt nun (a), (b) und (c). Nach (a) gilt, dass  $z < x - 1$  ist und nach der Voraussetzung gilt, dass  $xy$  eine Baumkante ist, mit  $y = x + 1$ . Nach (b) gilt, dass wenn  $y = n$  und somit  $x = n - 1$  ist, dass  $z > 1$  gilt. Wir betrachten nun  $C_1$  und  $C_2$  mit den Eckenmengen wie oben. Wir müssen noch zeigen, dass zwischen den zwei Eckenmengen  $C_1$  und  $C_2$  keine Kanten in  $G$  existieren. Dies folgt jedoch aus (c1) und (c2) wie oben. Somit ist  $T$  eine trennende Eckenmenge von  $G$ . ■

Das Lemma 3.2 gilt für den Fall  $z < x$ . Im folgenden Korollar betrachten wir den Fall  $z > y$ .

**Korollar 3.3.** *Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Hamiltongraph. Des Weiteren sei  $G_T$  ein Tiefensuchbaum von  $G$ , der ein Hamiltonpfad ist, und die Kante  $(n, 1)$  existiere in  $G$ . Es sei  $xy$  eine Baumkante mit  $y = x + 1$  und es sei  $z > y$ . Dann trennt die Menge  $\{x, y, z\}$  den Graphen  $G$  genau dann, wenn*

- (a)  $z > y + 1$  und
- (b)  $z < n$ , wenn  $x = 1$ , und
- (c) wenn es keine Rückwärtskante  $uv$  mit  $u > v$  gibt, für die eine der folgende Aussagen gilt:
  - (c1)  $u > z$  und  $z > v > y$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Eckenmengen  $V(C_1)$  und  $V(C_2)$  aus den Beweis von Lemma 3.2. Durch Umnummerierung der Ecken von  $n$  zu 1 und von 1 zu  $n$  und der dadurch resultierenden Orientierung der anderen Ecken entsteht ein Graph  $\bar{G}_T$ , der die selben Eigenschaften hat wie  $G_T$ . Somit folgt aus den Lemma (3.2) für den Graphen  $\bar{G}_T$  die Aussage von den Korollar. ■

Wir befassen uns ab jetzt nur mit den Fall  $x > z$ .

Zur Darstellung der Tutte-Kontraktionsfolge definieren wir uns  $z_1(x)$  und  $z_2(x)$ . Wir betrachten im Folgenden wieder einen Hamiltonpfad, welcher ein Tiefensuchbaum für den Graphen  $G$  ist. Dann können wir mit Hilfe von (c1) und (c2) die Ecken  $z_1(x)$  und  $z_2(x)$  wie folgt definieren:

$$z_1(x) := \max\{z \mid z < x \text{ und es existiert eine Rückwärtskante } uz \text{ mit } u > x + 1\}$$

und

$$z_2(x) := \max\{z \mid z < x - 1 \text{ und es existiert keine Rückwärtskante } uv \text{ mit } v < z < u < x\}.$$

Ist  $z_1(x)$  oder  $z_2(x)$  leer, so behandeln wir diese jeweils als Ecke mit der Nummerierung 0 für die folgenden Aussagen. Wir können nun mit Hilfe dieser beiden Mengen nachweisen, ob  $G$  einen 3-Trenner besitzt oder nicht. Dazu überprüfen wir folgende Eigenschaften:

Es sei  $z_2(x) \geq z_1(x)$ . Gilt nun  $y < n$  oder  $z_2(x) > 1$ , dann ist  $T = \{x, y, z_2(x)\}$  eine trennende Eckenmenge, da es keine Rückwärtskante von  $\tilde{C}_1 = \{z_2(x) + 1, \dots, x - 1\}$  nach  $\tilde{C}_2 = \{y + 1, \dots, n, 1, \dots, z_2(x) - 1\}$  gibt.

Gilt jedoch  $z_1(x) > z_2(x)$ , dann existiert keine trennende Eckenmenge  $\{x, y, z\}$  mit  $z < x$ . Wir betrachten nun die trennende Eckenmenge  $\{x, y, z\}$ . Wenn  $z < z_1(x)$  gilt, existiert die Rückwärtskante  $uz_1(x)$  mit  $u > y$  so, dass  $\{x, y, z\}$  kein 3-Trenner ist.

Wenn  $z \geq z_1(x) > z_2(x)$  ist, existiert eine Rückwärtskante  $uv$  mit  $v < z < u < x$  so, dass



$\{x, y, z\}$  keine trennende Eckenmenge ist. Diese Erkenntnisse werden später benötigt, um einen 2-Separator in Linearzeit zu finden.

Um nun die Tutte-Kontraktionsfolge algorithmisch zu beschreiben, benötigen wir die Funktion *cur*. Wir betrachten in einem Graphen  $\tilde{G}$  die aus der Kontraktion neu entstandene Ecke  $v_{x,y}$  als Menge, welche die Ecken  $\{x, y\}$  enthält. Des Weiteren sind alle Ecken  $z \in V(\tilde{G})$  als Mengen definiert. Das heißt, für  $z \in V(\tilde{G})$  gilt dann  $z = \{z\}$ . Dann bildet für alle Ecken  $x \in V(G)$  die Abbildung  $\mathbf{cur}_{\tilde{G}}(x)$  die Ecke  $x$  auf eine Menge von Ecken in  $V(\tilde{G})$  ab. Es sei  $G_T$  der Tiefensuchbaum von  $G$ , welcher so gewählt ist, dass er auch ein Hamiltonpfad ist. Nun können wir die Menge der **Rückwärtskanten im Minor** definieren. Dazu bezeichnet  $B$  die Menge, welche alle Rückwärtskanten aus  $G_T$  enthält. Es sei nun  $B_c$  als die Menge der **Rückwärtskanten im Minor** definiert, wenn für  $uv \in B$

$$B_c := \{ij \mid i = \mathbf{cur}_{\tilde{G}}(u), j = \mathbf{cur}_{\tilde{G}}(v), i \neq j, uv \in B\}$$

gilt.

Wir betrachten nun eine Möglichkeit, Rückwärtskanten durch Intervalle darzustellen. Dafür wird die **chain decomposition** aus der Arbeit von Schmidt [10] definiert. Es sei  $G$  ein beliebiger zusammenhängender Graph und  $G_T$  der Tiefensuchbaum von  $G$ . Die Enden von jeder Rückwärtskante  $e$  werden mit  $s(e)$  und  $t(e)$  bezeichnet, wobei  $s(e)$  über  $t(e)$  in  $G_T$  liegt. Jede Rückwärtskante  $e$  schließt mit dem Tiefensuchbaum einen Fundamentalkreis  $C(e)$ . Wir orientieren die Kanten des Tiefensuchbaums  $G_T$  indem jede Kante des Tiefensuchbaums zur Wurzel  $r$  von  $G_T$  orientiert wird und jede Rückwärtskante von  $r$  weg orientiert wird. Es wird nun algorithmisch beschrieben, wie in einem Tiefensuchbaum eine chain decomposition aufgestellt wird. Dazu wird jede Kante eines Tiefensuchbaums  $G_T$  als unbesucht markiert. Für jede Ecke  $v \in V(G_T)$  in der aufsteigenden DFI-Reihenfolge und jede unbesuchte Rückwärtskante  $e$ , welche inzident zu  $v$  ist, führe folgende Schritte durch:

- (1) Traversiere  $C(e)$  von  $e$  aus bis zur ersten besuchten Kante und markiere die Kanten auf diesen Weg als besucht.
- (2) Überprüfe, ob es noch Rückwärtskanten in  $G_T$  gibt, falls ja, gehe zu (1), sonst Stopp.

Jeder so traverierte Teilgraph von  $G_T$  ist eine **chain**. Es sei  $C_i$  die  $i$ -te chain, das heißt, diese chain wurde im  $i$ -ten Schritt des Algorithmus beschrieben. Wir können nun den Graphen mit Hilfe dieser chain decomposition wie in [10] darstellen. Dadurch entsteht eine Folge von chains  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$  wobei  $\ell$  die maximale Anzahl an chains in einem Graphen ist. Wir können sogar beweisen, dass  $\ell = m - n + 1$  gilt.

**Lemma 3.4.** *Die maximale Anzahl an chains in einem zusammenhängenden Graph beträgt  $n - m + 1$*

**Beweis:** Es sei  $G$  ein Graph und  $G_T$  sein Tiefensuchbaum. Dann besitzt  $G_T$  genau  $m - n + 1$  Rückwärtskanten. Wenn in jeder chain mindestens eine Rückwärtskante enthalten ist, gibt es maximal  $m - n + 1$  verschiedene chains. ■

Wir definieren nun die Intervalle und die Intervallüberlappungen in  $G_T$ . Wir betrachten nun Hamiltongraphen  $G$  mit einem Tiefensuchbaum  $G_T$ , der ein Hamiltonpfad ist. Ein **Intervall** auf  $G_T$  ist definiert durch eine Rückwärtskante  $e$  wobei das Minimum des Intervalls  $s(e)$  und das Maximum des Intervalls  $t(e)$  ist. Dabei enthält das Intervall alle Ecken, die zwischen  $s(e)$  und  $t(e)$  in  $G_T$  liegen. Wir nehmen dazu nun immer die größten Intervalle, das heißt, enthält ein Intervall  $I_k$  ein Intervall  $I_j$ , so werden diese Intervalle vereinigt und es gilt, dass  $I_k \cup I_j = I_k$ . Somit können wir den Graphen  $G_T$  mit Hilfe von Intervallen darstellen. Zwei Intervalle **überlappen** dann, wenn es mindestens eine Ecke gibt, die in beiden Intervallen liegt, jedoch nicht alle Ecken eines Intervalls in einen anderen Intervall enthalten sind. In der Abbildung (3.1) ist der Tiefensuchbaum eines Hamiltongraphens angegeben, welcher 10 Ecken besitzt. Die Rückwärtskante  $(n, 1)$  gehört dabei zu den Tiefensuchbaum dazu, damit dieser auch ein Hamiltonpfad ist. Diese Rückwärtskante erhält das Intervall  $I_0$  und wird dabei nicht bei der Intervallüberlappung betrachtet, da dies alle Intervalle enthalten würde. Alle anderen Rückwärtskanten bilden dann die Intervalle  $I_1$  bis  $I_6$ . Dabei wird das Intervall  $I_1$  in das Intervall  $I_2$  und das Intervall  $I_5$  in das Intervall  $I_6$  integriert.

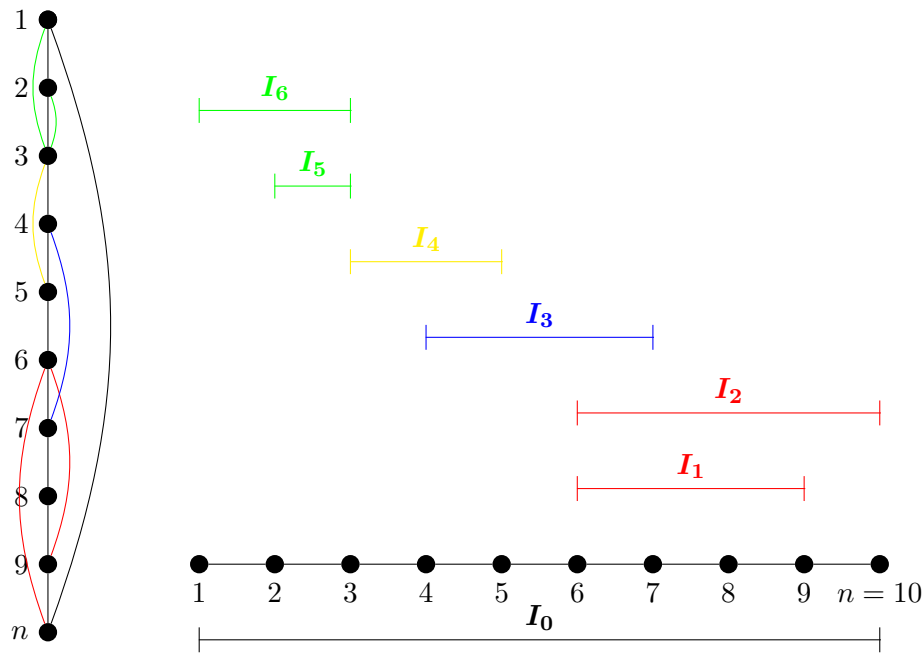


Abbildung 3.1: Ein Tiefensuchbaum eines Hamiltongraphen mit Rückwärtskanten und den entsprechenden Intervallen. Siehe auch [10].

Wir bezeichnen mit  $x_l$  die minimale Ecke in  $cur_{\tilde{G}}(x)$  und  $y_h$  die maximale Ecke in  $cur_{\tilde{G}}(y)$ . Wir können somit  $z_1(x)$  wie folgt bestimmen:

$$\max\{v < x_l \mid \text{es existiert eine Rückwärtskante } uv \in B \text{ mit } u > y_h\}.$$

Somit ist  $cur_{\tilde{G}}(v)$  die größte Ecke, sodass  $cur_{\tilde{G}}(x)$  über  $cur_{\tilde{G}}(v)$  im Minor liegt. Diese besitzt eine Rückwärtskante im Minor, die von einer Ecke  $u$  ausgeht, welche über einer Ecke aus  $cur_{\tilde{G}}(y)$  liegt. Um  $z_2$  zu bestimmen, definieren wir die **cand-Struktur** wie folgt: Es sei  $G$  ein Graph,  $G_T$  sein Tiefensuchbaum und somit auch ein Hamiltonpfad. Für  $x \in V(G_T)$  gibt es ein  $z \in V(G_T)$  so, dass

$$cand(x) = \{z < x \mid \text{es existiert keine Rückwärtskante } uv \text{ mit } v < z < u < x\}.$$

Wir betrachten nun die rekursive Definition von dieser Struktur. Dabei ist dann  $cand(1) = \emptyset$  und für  $x > 1$

$$cand(x) = \{x-1\} \cup (cand(x-1) - \{z \mid (x-1, v) \text{ ist eine Rückwärtskante und } v < z\}).$$

Um nun  $z_2(x)$  darzustellen, verwenden wir  $cand(x)$  für  $x > 1$ . Wir betrachten nun, wie sich die **cand**-Struktur mit der Kontraktion entwickelt. Zunächst definieren wir jede Ecke  $x$  als Intervall mit einem Element in der **cand**-Struktur und weisen jedes dieser Intervalle  $x$  das Element  $cand(x+1)$  zu. In der **cand**-Struktur werden die Baumkanten entfernt und die Rückwärtskanten als sogenannte **cand**-Kanten beibehalten. Existiert eine isolierte Ecke, so bekommt diese die Baumkante wieder. Wenn wir nun eine Baumkante zwischen den zwei Ecken  $x$  und  $y$  aus  $V(G)$  kontrahieren, werden die Ecken  $cur(x)$  und  $cur(y)$  als Intervall zusammengefasst. Die kontrahierte Ecke wird mit  $v_{xy}$  bezeichnet. Sie definiert in den Graphen nach der Kontraktion ein Intervall, welches die Ecken  $x$  und  $y$  zusammenfasst. Dabei gilt für die neu entstandene Ecke  $v_{x,y}$ , dass  $v_{x,y} = cur_{\tilde{G}}(x) = cur_{\tilde{G}}(y)$  ist. Die eingehenden und ausgehenden Rückwärtskanten von  $cur_{\tilde{G}}(x)$  und  $cur_{\tilde{G}}(y)$  sollten dann auch der Ecke  $v_{xy}$  zugeordnet werden. Somit bilden diese in der **cand**-Struktur ein Intervall und es gilt  $cand(v_{xy}) = cand(cur_{\tilde{G}}(x))$ . Wir betrachten nun die Ecke  $a \in V(\tilde{G})$ , welche die erste Ecke über  $v_{x,y}$  im Minor ist, das heißt, dass es die erste Ecke über  $cur_{\tilde{G}}(y)$  vor der Kontraktion ist. Das erste Element von  $cand(a)$  ist dann  $v_{x,y}$ . Im Graphen vor der Kontraktion wäre es  $cur_{\tilde{G}}(y)$ .

$z_2(x)$  ist dann das erste Element von  $cand(v_{x,y})$  für das gilt, dass für eine Ecke  $k$  und eine Rückwärtskante  $\tilde{e}$ , welche ausgehend von  $v_{x,y}$  zu der Ecke  $k$  führt und  $k$  das kleinste Element über  $v_{x,y}$  ist, gilt, dass  $v_{x,y} < z_2(x) \leq k$ . Dieses  $k$  ist jedoch auch das kleinste Element über  $cur_{\tilde{G}}(x)$  oder  $cur_{\tilde{G}}(y)$  vor der Kontraktion, zu dem eine Rückwärtskante führt.

**Lemma 3.5.** *Es sei  $G$  ein Hamiltongraph mit einem Tiefensuchbaum  $G_T$ , welcher ein*

Hamiltonpfad ist. Dieser besitzt dann die Rückwärtskante  $(n, 1)$ . Es seien  $x$  und  $z$  Ecken in  $G$  mit  $x > z$ . Wenn  $z < x - 1$  für  $z > 1$  oder  $x < n$  gilt und es keine Kante  $(u, v)$  gibt mit  $z < u < x$  und  $v < z$  oder  $v > x$ , dann ist  $T = \{x, z\}$  eine trennende Eckenmenge.

**Beweis:** Es sei  $z < x - 1$ ,  $x < n$  und  $z > 1$ .

Wir betrachten die Mengen  $C_1$  und  $C_2$  mit

$$V(C_1) = \{x + 1, \dots, n, 1, \dots, z - 1\}$$

und

$$V(C_2) = \{z + 1, \dots, x - 1\}.$$

Angenommen  $T = \{x, z\}$  ist keine trennende Eckenmenge. Dann existiert eine Kante zwischen  $C_1$  und  $C_2$  in  $G$ . Da jedoch gilt, dass  $u$  in  $C_2$  liegt und  $v$  in  $C_1$  liegt, existiert eine Kante zwischen  $u$  und  $v$ , ein Widerspruch. ■

Wir können nun mit  $z_1(x)$  und  $z_2(x)$  einen 2 Trenner  $T = \{x, z\}$  in Linearzeit finden. Das maximale  $z < x$ , so dass eine Rückwärtskante  $uz_1(x)$  existiert mit  $u > x$ , wird definiert durch  $z_1(x)$ . Durch  $z_2(x)$  erhalten wir das maximale  $z_2(x) < x - 1$ , so dass keine Rückwärtskante  $uv$  existiert mit  $v < z < u < x$ . Wenn nun  $z_2(x) \geq z_1(x)$  gilt, dann ist  $\{x, z_2(x)\}$  eine trennende Eckenmenge nach Lemma 3.5. Ist  $z_2(x) < z_1(x)$ , dann existiert kein solcher 2-Trenner von  $G$  mit  $z < x$ .

### 3.2 Ein Zertifikat für 3-zusammenhängende Graphen

Die Vorherige Betrachtungen galten nur für Hamiltongraphen. Jetzt wollen wir dies auch für allgemeine Graphen betrachten. Dazu verwenden wir einige Ergebnisse aus der Arbeit von Schmidt „Contractions, Removals, and Certifying 3-Connectivity in Linear Time“ [9], um dies auf allgemeine Graphen zu erweitern. In der Arbeit [9] sind Graphen mit parallelen Kanten erlaubt. Aus diesem Grund sind nun zusätzlich Graphen zugelassen, welche parallelen Kanten besitzen. Zur Definition einer Kontraktionsfolge benötigen wir spezielle Operationen, die sogenannten BG-Operationen. Dabei sind die folgenden Operationen auf 3-zusammenhängenden Graphen definiert als **BG-Operationen**:

- (1) Füge dem Graphen eine Kante  $f = xy$  hinzu (Abbildung (3.2))
- (2) Unterteile eine Kante  $e = ab$  mit der Ecke  $x$  und füge die Kante  $f = xy$  mit  $y \notin \{a, b, x\}$  (Abbildung (3.3))
- (3) Unterteile die Kante  $e = ab$  mit der Ecke  $x$  und die Kante  $f = cd$  mit  $y$  und füge die Kante  $g = xy$  hinzu (Abbildung 3.4)).

Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele für die Formen der BG-Operationen:

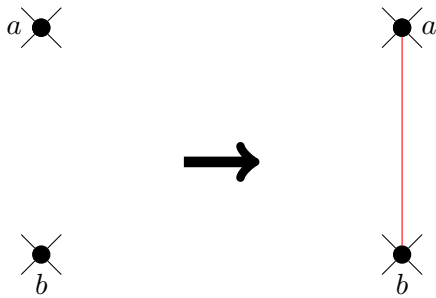


Abbildung 3.2: BG-Operation 1

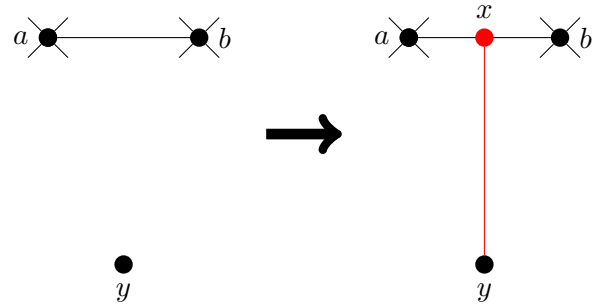


Abbildung 3.3: BG-Operation 2

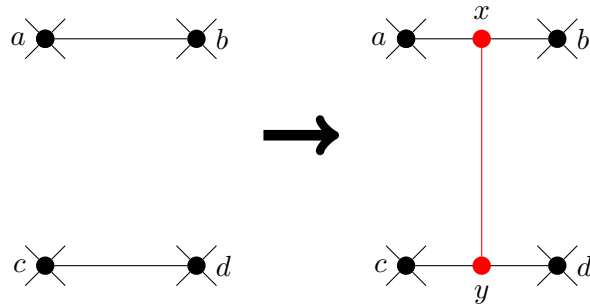


Abbildung 3.4: BG-Operation 3

Diese sogenannten Operationen erhalten dabei den 3-Zusammenhang. Dies zeigen wir im folgendem Lemma

**Lemma 3.6.** *Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph. Wendet man eine beliebige BG-Operation in den Graphen  $G$  an, so bleibt der Graph 3-zusammenhängend.*

**Beweis:** Es seien die Ecken  $a, b, c, d, x, y \in V(G)$ . Für die erste BG-Operation ist nichts zu zeigen, da das Hinzufügen einer Kante  $e = xy$  die Zusammenhangszahl offensichtlich nicht verringert. Wir betrachten zunächst die dritte BG-Operation. Es seien die Ecken  $a, b, c$  und  $d$  in  $V(G)$  enthalten und es sei  $\bar{G}$  der Graph, bei dem die Ecken  $x$  und  $y$  und die Kante  $e = xy$  wie in der dritten BG-Operation hinzugefügt wurden. Wir nehmen indirekt an, dass  $\bar{G}$  nicht 3-zusammenhängend ist. Das bedeutet, es existieren zwei Ecken, welche den Graphen in mindestens zwei Komponenten aufspalten. Der 2-Trenner  $T$  enthält dabei nur Ecken aus der Menge  $\{a, b, c, d, x, y\}$ , da alle anderen Ecken aus  $G$  nur durch mindestens 3

Ecken getrennt werden können. Wir betrachten folgende Fallunterscheidung:

**Fall 1:**  $T = \{a, b\}$ . Dann enthält eine der Komponenten von  $\bar{G} - T$  nur die Ecke  $x$ , da der Graph  $G$  3-zusammenhängend ist und  $x$  die Ecke ist, welche aus der Unterteilung der Kante  $f = ab$  entstanden ist. Dann verbindet die Kante  $e = xy$  jedoch die zwei Komponenten von  $\bar{G} - T$ , ein Widerspruch. Der Fall  $T = \{c, d\}$  folgt analog.

**Fall 2:**  $T = \{a, x\}$ . Dann ist  $T = \{a, b\}$  in  $G$  eine trennende Eckenmenge, da durch das Ersetzen des Pfades  $P = \{a, x, b\}$  durch den Pfad  $P = \{a, b\}$  der ursprüngliche Graph  $G$  entsteht, jedoch  $T = \{a, b\}$  eine trennende Eckenmenge bleibt, ein Widerspruch. Die Fälle  $T = \{x, b\}, T = \{c, y\}, T = \{y, d\}$  folgen analog.

**Fall 3:**  $T = \{x, y\}$ . Der Graph  $\bar{G} - T$  entspricht dann dem Graphen  $G$  ohne die Kanten  $e_1 = ab$  und  $e_2 = cd$ . Dadurch, dass  $G$  3-zusammenhängend ist, ist  $G$  ohne die Kanten  $e_1$ , und  $e_2$  zusammenhängend, da es einen Pfad in  $G$  geben muss, welcher die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  nicht enthält. Somit ist  $T$  keine trennende Eckenmenge, ein Widerspruch.

**Fall 4:**  $T = \{a, c\}$ . Dann würde jedoch  $T$  auch eine trennende Eckenmenge in  $G$  sein, da  $a$  und  $c$  in  $V(G)$  enthalten sind, ein Widerspruch. Die Fälle  $T = \{a, d\}, T = \{b, d\}, T = \{c, b\}$  folgen analog.

Somit gibt es keine trennende Eckenmenge  $T$  in  $\bar{G}$ . Die zweite BG-Operation folgt analog aus den obigen Beweis für die dritte BG-Operation. ■

Mit Hilfe dieser Operationen hat Schmidt [9] in seiner Arbeit die BG-Pfade definiert. Es sei nun im folgenden  $S$  eine Unterteilung vom  $K_2^3$  oder von einem 3-zusammenhängenden Graphen. Der  $K_2^3$  besteht dabei aus zwei Ecken und drei parallelen Kanten. Wir definieren nun eine Ecke  $v$  aus  $V(S)$  als **reale Ecke**, wenn  $d(v) \geq 3$  gilt. Dann definieren wir die **Menge der realen Ecken** mit  $V_{real}(S)$ . Nun können wir die Links von  $S$  betrachten. Ein **Link**  $L$  der Unterteilung  $S$  ist ein Pfad, dessen Endecken in  $V_{real}(S)$  liegen und  $L$  ansonsten keine weitere reale Ecke enthält. Zwei Links sind dabei parallel, wenn sie dieselben realen Endecken in  $V_{real}(S)$  haben. Mit Hilfe dieser zwei Definitionen können wir nun BG-Pfade definieren. Es sei  $S$  ein Untergraph von  $G$ , sodass  $S$  eine Unterteilung eines Graphens  $G_S$  mit  $G_S = K_2^3$  oder  $G_S$  ist ein 3-zusammenhängender Graph. Ein Pfad  $P$  von  $x$  nach  $y$  in  $G_S$  mit  $x \neq y$  heißt **BG-Pfad**, wenn für  $P$  folgende Eigenschaften gelten:

- (1.)  $V(P) \cap V(S) = \{x, y\}$ .
- (2.) Jeder Link von  $S$ , der  $x$  und  $y$  enthält, hat diese als Endecken.
- (3.) Es sei  $x$  die innere Ecke eines Links  $L_x$  in  $S$  und  $y$  eine innere Ecke des Links  $L_y$  in  $S$ , wobei  $L_x \cap L_y = \emptyset$  gilt. Wenn  $P$  der Pfad zwischen  $x$  und  $y$  ist, dann sind  $L_x$  und  $L_y$  nicht parallel zueinander, wenn  $|V_{real}(S)| \geq 4$  gilt.

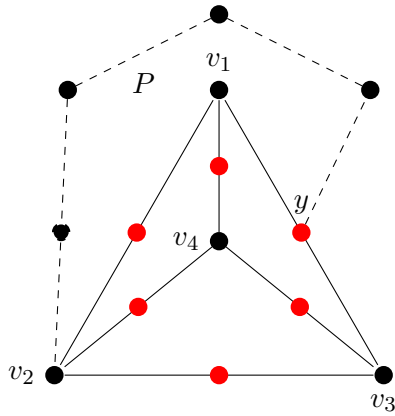


Abbildung 3.5: Der Pfad  $P$  ist ein BG-Pfad für die  $K_4$  Unterteilung  $S$ .

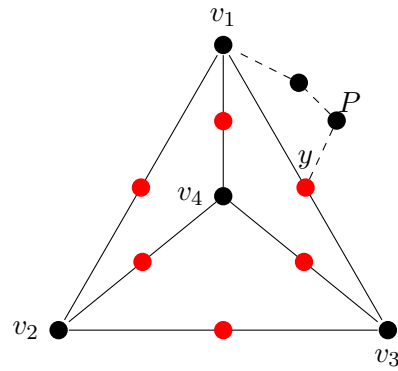


Abbildung 3.6:  $P$  ist kein BG-Pfad der  $K_4$  Unterteilung  $S$ , da die Ecke  $y$  auf den Link zwischen  $v_1$  und  $v_3$  liegt und  $y$  ist keine End-ecke dieses Links.

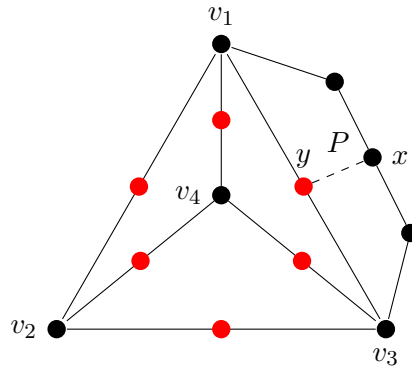


Abbildung 3.7:  $P$  ist kein BG-Pfad für die  $K_4$  Unterteilung des  $S \cup (v_1 v_3)$ , da  $x$  und  $y$  innere Ecken der zwei parallelen Links zwischen  $v_1$  und  $v_3$  sind und  $|V_{real}| \geq 4$  ist.

Die drei Formen der BG-Pfade sind dabei den BG-Operationen ähnlich, außer dass die Kanten aus den BG-Operationen durch Pfade ersetzt wurden.

Wir betrachten hierbei speziell auch den Graphen  $K_2^3$ , da durch Anwendung eines BG-Pfades eine  $K_4$  Unterteilung entsteht. Für eine schnelle algorithmische Beschreibung einer  $K_4$  Unterteilung in  $G$  ist es leichter, den Graphen  $K_2^3$  zu finden, da dieser weniger Ecken hat. Die Definitionen der BG-Pfade würden strukturell auch nur für 3-zusammenhängende Graphen funktionieren. Mit Hilfe dieser BG-Pfade hat Schmidt nun eine Folge aufgestellt, welche ausgehend von einer  $K_4$  Unterteilung einen Graphen  $G$  erzeugt, welcher 3-zusammenhängend ist. Diese Folge wird auch als Expansionsfolge bezeichnet.

Im folgenden Lemma betrachten wir die Existenz dieser Expansionsfolge, bevor wir das

Zertifikat betrachten.

**Lemma 3.7.** *Es sei  $G$  ein 3-zusammenhängender Graph und  $S \subset G$  eine Unterteilung eines 3-zusammenhängenden Graphen. Dann enthält  $G$  einen BG-Pfad von  $S$ .*

**Beweis:** Es sei  $S$  die Unterteilung eines 3-zusammenhängenden Graphens  $U \subseteq G$ . Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $U$  dem Graphen  $S$  ohne Unterteilung entspricht. Dann ist jeder Link des Graphen  $S$  eine Kante des Graphens und alle Ecken von  $S$  sind reale Ecken (das heißt, dass  $V(U) = V(S)$  gilt). Sollte  $V(G) \setminus V(S) \neq \emptyset$  gelten, so existiert in  $G$  nach Mengers Theorem ein Pfad mit Enden aus  $V(S)$ . Dieser ist insbesondere ein Link von  $S$  und somit auch ein BG-Pfad von  $S$ , da jede Ecke von  $S$  eine reale Ecke ist. Sollte jedoch  $V(G) \setminus V(S) = \emptyset$  sein, so existiert mindestens eine Kante in  $E(G) \setminus E(S)$ , da  $S$  ein echter Teilgraph von  $G$  ist (nach Voraussetzung). Diese Kante ist dann jedoch ein BG-Pfad von  $S$ .

Nun betrachten wir den Fall, dass  $S \neq U \subseteq G$  gilt. Es sei  $x$  ein innerer Knoten eines Links  $L$  mit den Enden  $a, b \in V(S)$ . Weiterhin sei  $A$  die Menge aller innerer Knoten der Links von  $S$ , welche entweder  $L$  entsprechen oder parallel zu  $L$  verlaufen. Die Menge  $B$  sei nun die Eckenmenge, die folgendermaßen definiert ist:  $B := V(S) \setminus (A \cup \{a\} \cup \{b\})$ . Wir wenden nun den Satz von Menger zwischen den Mengen  $A$  und  $B$  in  $G$  an. Das bedeutet, es existieren drei  $A$ - $B$ -Pfade, wobei mindestens einer  $a$  und  $b$  vermeidet. Das bedeutet jedoch, dass  $G \setminus E(S)$  einen  $A$ - $B$ -Pfad  $P$  enthält, welcher als Enden den inneren Knoten  $x$  des Links  $L$  und einen Knoten  $y \in V(S) \setminus \{a\} \setminus \{b\}$  besitzt. Dieser Pfad  $P$  ist dann ein BG-Pfad von  $S$ , da  $x$  und  $y$  nicht in parallelen Links liegen, da  $x \in A$  und  $y \in B$  gilt. ■

Mit der Hilfe dieses Lemmas können wir nun das nachfolgende Korollar beweisen.

**Korollar 3.8.** *Der Graph  $G$  ist 3-zusammenhängend genau dann wenn der Minimalgrad  $\delta(G) \geq 3$  ist und es eine Folge von BG-Pfaden von einer beliebigen  $K_4$ -Unterteilung zu den Graphen  $G$  gibt.*

**Beweis:** Wenn  $G$  3-zusammenhängend ist, folgt die Aussage aus dem Lemma 3.7 und Lemma 3.6, indem wir ausgehend von einer  $K_4$ -Unterteilung immer wieder BG-Pfade hinzufügen, bis wir den Graphen  $G$  erhalten. Wir nehmen an, es sei nun  $\delta(G) \geq 3$  und es existiere eine Folge von BG-Pfaden, die ausgehend von einer beliebigen  $K_4$  Unterteilung den Graphen  $G$  darstellt. Aus Lemma 3.6 folgt, dass BG-Operationen den 3-Zusammenhang erhalten. Die BG-Pfade, welche die gleichen Eigenschaften wie BG-Operationen aufweisen, erhalten auch den 3-Zusammenhang. (Anmerkung: Hier muss ich noch ein Lemma einführen, was das beweist) Somit ist  $G$  3-zusammenhängend, da  $K_4$  3-zusammenhängend ist. ■

Somit haben wir die Existenz der BG-Pfadsequenz sicher gestellt. Durch den  $K_2^3$  können wir effizient eine  $K_4$  Unterteilung in einen Graphen  $G$  finden (Dauer  $O(m)$ ) und ausgehend



davon die BG-Pfadsequenz so lange anwenden, bis der komplette Graph  $G$  dargestellt wurde. Dies kann man durch chain-decomposition für jede Ecke in  $O(1)$ -Zeit machen, wie in [10]. Somit können wir den 3-Zusammenhang in der Laufzeit  $O(m + n)$  zertifizieren, wobei  $m$  die Anzahl der Kanten und  $n$  die Anzahl der Ecken ist. Dabei dient diese Sequenz als Zertifikat. Den Algorithmus hat Schmidt in [9] definiert. Für den Fall, dass  $G$  nicht 3-zusammenhängend ist, gilt als Zertifikat, dass es einen 2-Trenner in  $G$  gibt. Dieser Trenner lässt sich leicht und schnell verifizieren. Das Zertifikat ist dabei ein Separationspaar in  $G$ . Um so ein Separationspaar zu finden müssen wir die Begriffe Ohr und Ohrendekomposition definieren. Es sei  $G$  ein Graph. Ein **Ohr** von  $G$  ist entweder ein Kreis  $P$  mit  $|V(G) \cap V(P)| = 1$  oder ein Pfad, dessen Endecken die einzigen Ecken sind, welche in  $V(G)$  liegen. Wir bezeichnen ein Ohr als **offenes Ohr**, wenn es zwei unterschiedliche Endecken in  $G$  besitzt. Eine **Ohrendekomposition** von  $G$  ist eine Folge von Teilgraphen von  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , so dass:

- $G_1 := P_1$  ein Kreis ist
- $G_k = G$  ist,
- für alle  $0 < i < k$   $G_{i+1}$  durch hinzufügen eines (offenen) Ohres  $P_{i+1}$  zu  $G_i$  entsteht.

Mit Hilfe dieser Ohrendekomposition können wir in  $O(m + n)$  Zeit einen 2-Trenner in  $G$  finden. Dies kann man auch in der Arbeit von Schmidt [10] nachlesen.

# Kapitel 4

## Ein Zertifikat für 4-Zusammenhang

---

Im Hauptresultat dieser Arbeit wird ein zertifizierender Algorithmus betrachtet, welcher 4-Zusammenhang eines Graphens zertifiziert. Dabei betrachten wir die Ergebnisse der Arbeiten von Martinov und Mader und stellen eine Kontraktionsfolge auf, welche uns den 4-Zusammenhang des Graphens sichert.

### 4.1 Vorbereitungen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Arbeit von Martinov [6] behandelt. Dafür sei die Menge der  $n$ -zusammenhängenden, kontraktionskritischen Graphen definiert durch  $\Gamma_n$ . Im folgenden Lemma betrachten wir die Elemente von  $\Gamma_n$ .

**Lemma 4.1.** *Ein Graph  $G$  ist genau dann ein Element von  $\Gamma_n$ , wenn entweder  $G = K_{n+1}$  oder  $G$   $n$ -zusammenhängend ist und je zwei adjazente Ecken in einem  $n$ -Trenner liegen.*

**Beweis:** Für den Fall  $G = K_{n+1}$  ist nichts zu zeigen, da die Behauptung aus den Definitionen von  $K_{n+1}$  und  $\Gamma_n$  folgt. Also betrachten wir den Fall, dass  $G$   $n$ -zusammenhängend ist und je zwei adjazente Ecken in einen  $n$ -Trenner von  $G$  liegen. Es sei nun  $e$  eine Kante in  $E(G)$  und  $\tilde{G} = G/e$ . Damit ist aber  $\tilde{G}$  nicht mehr  $n$ -zusammenhängend, da zwei Ecken aus einen  $n$ -Trenner von  $G$  kontrahiert wurden und somit ein  $(n - 1)$ -Trenner entstanden ist. Das bedeutet, dass  $G \in \Gamma_n$  gilt. Somit ist die eine Richtung gezeigt.

Es sei nun  $G \in \Gamma_n$  und  $G \neq K_{n+1}$  (da dieser Fall aus der Definition von  $\Gamma_n$  folgt). Wir nehmen indirekt an, dass es zwei Ecken  $v, w \in V(G)$  gibt, so dass  $v$  und  $w$  nicht in einen  $n$ -Trenner von  $G$  liegen. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $T$  der  $n$ -Trenner, welcher  $v$ , jedoch nicht  $w$  enthält. Wir betrachten den Graphen  $\tilde{G} = G/vw$ . Da  $G \in \Gamma_n$  liegt, besitzt  $\tilde{G}$  einen  $(n - 1)$ -Trenner  $\tilde{T}$ . Wir betrachten nun folgende Fallunterscheidung: Es sei  $v_{v,w}$  die Ecke, welche aus der Kontraktion von  $v$  und  $w$  entstanden ist.

**Fall 1:**  $v_{v,w}$  ist in  $\tilde{T}$  enthalten. Dann ist  $(\tilde{T} - \{v_{v,w}\}) \cup \{v, w\}$  ein  $n$ -Trenner von  $G$ , ein Widerspruch.

**Fall 2:**  $v_{v,w}$  ist nicht in  $\tilde{T}$  enthalten. Dann enthält  $G$  jedoch den Trenner  $\tilde{T}$  und somit ist  $G$  nicht  $n$ -zusammenhängend, ein Widerspruch. Somit folgt, dass je zwei adjazente Ecken in einen  $n$ -Trenner von  $G$  liegen müssen. ■

Nun betrachten wir Aussagen über  $n$ -Fragmente.

**Lemma 4.2.** *Es seien  $A$  und  $B$   $n$ -Trenner in einem  $n$ -zusammenhängenden Graph  $G$ . Dann gilt eine der beiden folgenden Aussagen:*

- (i)  *$A$  ist Teilmenge eines abgeschlossenen  $n$ -Fragments bezüglich  $B$  und  $B$  ist Teilmenge eines abgeschlossenen  $n$ -Fragments bezüglich  $A$*
- (ii)  *$A$  schneidet alle Komponenten von  $G - B$  und  $B$  schneidet alle Komponenten von  $G - A$ .*

**Beweis:** Wir nehmen zuerst an, dass (ii) falsch ist. Das heißt, es existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Komponente  $H$  von  $G - A$  welche  $B$  nicht schneidet. Es sei  $\bar{H} = H \cup (A - B)$ . Damit folgt, dass  $\bar{H}$  zusammenhängend ist und in einem  $n$ -Fragment von  $G - B$  liegt. Dieses abgeschlossene Fragment enthält dann aber  $A$ . Des Weiteren liegt  $B$  in einem abgeschlossenen Fragment von  $G - A$ , da  $B$  in  $G - (H \cup A)$  nach Konstruktion enthalten ist. Für den Fall  $A = B$  ist nichts zu zeigen, da (i) dann aus der Definition von abgeschlossenen  $n$ -Fragmenten folgt.

Angenommen (i) gelte nicht. Das heißt, dass  $A$  nicht in einen abgeschlossenen  $n$ -Fragment bezüglich  $B$  liegt. Es sei  $H$  eine Komponente von  $G - A$ . Wir nehmen an,  $B$  schneidet  $H$  nicht. Dann folgt wie oben, dass  $A$  in einen abgeschlossenen Fragment bezüglich  $B$  liegt, ein Widerspruch. Somit muss  $B$  jede Komponente von  $G - A$  schneiden. Es folgt analog dazu, dass  $A$  alle Komponenten von  $G - B$  schneidet. ■

Wir betrachten nun eine weitere Aussage über abgeschlossene  $n$ -Fragmente.

**Lemma 4.3.** *Es seien  $A$  und  $B$  zwei  $n$ -Trenner von den  $n$ -zusammenhängenden Graphen  $G$ . Des Weiteren sei  $G'$  die Vereinigung von Komponenten von  $G - A$ . Wenn für  $G'$*

$$|V(G') \cap B| > \frac{1}{2}|A - B|$$

*gilt, dann ist  $G - (A \cup V(G'))$  ein Untergraph von einem abgeschlossenen  $n$ -Fragment bezüglich  $B$ .*

**Beweis:** Es seien  $A$  und  $B$   $n$ -Trenner von dem  $n$ -zusammenhängenden Graphen  $G$ . Des Weiteren ist  $H$  eine Komponente von  $B$  und  $\bar{G}'$  eine Komponente von  $A$ . Wir definieren

$\bar{H} = G - (H \cup B)$  und  $\bar{G}' = G - (V(G') \cup A)$ . Es sei zunächst  $H \cap \bar{G}' \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$|H \cap A| = |H \cap A| + |B - G'| + |B - G'|.$$

Da  $|H \cap A| + |B - G'|$  ein  $n$ -Trenner von  $G$  ist gilt insbesondere

$$|H \cap A| \geq n - |B - G'| = |B| - |B - G'| = |B \cap G'| + |B - G'| - |B - G'| = |B \cap G'|.$$

Analog gilt für  $\bar{G} \cap \bar{G}'$  dass

$$|\bar{H} \cap A| \geq |B \cap G'|.$$

Daraus können wir nun schließen, dass

$$2|B \cap G'| \leq |H \cap A| + |\bar{H} \cap A| = |A - B|$$

gilt.

Somit würde jedoch

$$|B \cap G'| \leq \frac{1}{2}|A - B|$$

gelten.

Da dies ein Widerspruch zu der Voraussetzung ist, folgt nun, dass  $H \cap \bar{G}' = \emptyset$  oder  $\bar{H} \cap \bar{G}' = \emptyset$  ist. Somit ist  $\bar{G}' \subseteq \bar{H} \cup B$  oder  $\bar{G}' \subseteq H \cup B$ , woraus die Behauptung folgt. ■

Das folgende Lemma ist eine weitere Aussage über  $n$ -Trenner. Dieses Lemma wird nicht bewiesen.

**Lemma 4.4.** *Wenn  $A$  und  $B$   $n$ -Trenner von einem  $n$ -zusammenhängenden Graph  $G$  sind mit  $A \neq B$  und  $H$  eine Komponente von  $G - A$  so ist, dass  $B \subseteq V(H) \cup A$  gilt, dann gibt es nur eine Komponente von  $G - B$  die kein Untergraph von  $H$  ist.*

Um die 4-zusammenhängenden Graphen zu klassifizieren, betrachten wir die kritisch 4-zusammenhängenden Graphen. Dazu betrachten wir folgendes Theorem:

**Theorem 4.5.** *Es sei  $G$  ein 4-zusammenhängender Graph. Dann liegt  $G$  in der Menge der kontraktionskritischen 4-zusammenhängenden Graphen  $\Gamma_4$  genau dann, wenn  $G$  4 regulär ist und jede Kante Teil eines Dreiecks ist.*

Um dieses Theorem zu beweisen, betrachten wir zwei Propositionen.

**Proposition 4.6.** *Es sei  $G \in \Gamma_4$  und es sei  $u \in V(G)$ . Weiterhin enthält der 4-Trenner  $A$  die Ecke  $u$  und wenigstens einen Nachbarn von  $u$  und  $H$  sei eine Komponente von  $G - A$ . Dann hat  $u$  zwei adjazente Nachbarn  $u'$  und  $u''$  so, dass  $u' \in V(H)$  und  $d_G(u') = 4$  gilt.*

**Beweis:** Wir beweisen diese Proposition mit Hilfe einer Induktion nach  $|V(H)|$ . Für den Fall  $|V(H)| = 1$  ist nichts zu zeigen. Für  $|V(H)| \geq 2$  sei  $A = \{u, u_1, u_2, u_3\}$  und  $v$  sei ein Nachbar von  $u$  mit  $v \in V(H)$ . Aus Lemma (4.1) folgt dann, dass  $G$  einen 4-Trenner  $B$  besitzt, welcher  $u$  und  $v$  enthält.

Wenn  $B \subseteq A \cup V(H)$  gilt, folgt mit Hilfe von Lemma (4.4), dass es einen echten Untergraphen  $H'$  von  $H$  gibt, so dass  $H'$  eine Komponente von  $G - B$  ist. Nach Induktionsvoraussetzung enthält  $H'$  einen adjazenten Nachbar von  $u \in A$  und somit würde die Behauptung für  $H$  gelten. Deshalb nehmen wir nun an, dass  $B = \{u, v, v_1, v_2\}$  und  $v_2 \notin A \cup V(H)$  ist. Es sei zunächst  $v_1 \notin V(H)$ . Dann enthält  $H - v$  eine Ecke  $u_0$ , da  $V(H) > 1$ .  $H_1$  ist die Komponente von  $G - B$ , die  $u_0$  enthält und  $H_2$  eine weitere Komponente von  $G - B$ . Nach Lemma (4.2) schneidet der Trenner  $A$  die Komponenten  $H_1$  und  $H_2$  von  $G - B$ . Damit ist  $u_i \in V(H_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$  und  $C = \{u, v, u_1, u_3\}$  ist ein 4-Trenner von  $G$ . Es sei  $\tilde{H}$  die Komponente von  $G - C$ , die  $u_0$  enthält. Damit gilt mit Hilfe der Induktionsbehauptung angewandt auf  $\tilde{H}$  die Behauptung. Wir betrachten nun den Fall, dass  $v_1 \in V(H)$ . Dann gilt nach Lemma (4.2), dass  $A$  jede Komponente von  $G - B$  schneidet. Wir betrachten den Graphen  $\tilde{G} = G - (V(H) \cup A \cup \{v_2\})$ . Wir wollen zeigen, dass  $\tilde{G}$  ein Untergraph einer Komponente von  $G - B$  ist. Wir betrachten die Komponente  $H_1$  und  $H_2 = G - (B \cup H_1)$ . Aus dem Lemma (4.2) folgt, dass  $A$  die Komponenten  $H_1$  und  $H_2$  schneidet. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u_i \in H_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ . Da  $u \in B$  gilt, betrachten wir nun folgende Fallunterscheidung:

**Fall 1:**  $u_3 \in H_1$ . Da  $T = \{u, v_2, u_2\}$  ein 3-Trenner für die Menge  $\tilde{H}_2 = H_2 - (A \cup H)$  ist, gilt, dass  $\tilde{H}_2 = \emptyset$  ist. Daraus folgt, dass  $\tilde{G} \subseteq H_1$  ist. **Fall 2:**  $u_3 \in H_2$ . Wir betrachten nun die Menge  $T = \{u, v_2, u_1\}$ .  $T$  wäre ein 3-Trenner für die Menge  $\tilde{H}_1 = H_1 - (A \cup H)$ . Daraus folgt, dass  $\tilde{H}_1 = \emptyset$  ist. Somit gilt, dass  $\tilde{G} \subseteq H_2$  ist.

Wir nehmen nun an, dass  $\tilde{G} \subseteq H_2$  gilt, wobei  $H_2$  eine Komponente von  $G - B$  ist.

Da  $G - \{u, v_2\}$  2-zusammenhängend ist, seien die zwei Ecken  $u_2$  und  $u_3$  in  $H_2$  enthalten. Sei  $H_1$  die Komponente von  $G - B$ , welche  $u_1$  enthält. Da  $B$  ein 4-Trenner und  $G$  4-zusammenhängend ist, gilt  $H_1 \neq H_2$ . Wenn  $|V(H_1)| \geq 2$  gilt, dann ist  $\{u, v, u_1, v_1\}$  ein 4-Trenner von  $G$ . Dann folgt die Behauptung wie oben gezeigt wurde. Nun haben wir gezeigt, dass  $u$  zwei Nachbarn hat, hier  $v$  und  $u_1$ , wovon einer der beiden in  $H$  liegt und der andere Grad 4 hat. Wiederholt man den Beweis für die Ecke  $u_1$  und der Komponente von  $G - A$ , welche  $v_2$  enthält, gilt, dass  $v_2$  ein adjazenter Nachbar von  $u$  ist, da  $u$  und  $v_2$  die einzigen Nachbarn von  $u_1$  sind, die nicht in  $H$  liegen.

Wir nehmen zum Abschluss noch an, dass ein 4-Trenner  $C$   $u_1$  und  $v_1$  enthält. Weiterhin seien  $H'_1$  und  $H'_2$  zwei disjunkte Komponenten von  $G - C$ . Da  $u_1$  adjazent zu  $H'_1$  und  $H'_2$  ist, können wir annehmen, dass  $v \in V(H'_1)$  und  $v_1 \in V(H'_2)$  ist. Damit gilt insbesondere, dass  $u$  in  $C$  liegt. Wenn  $C \subset V(H) \cup A$  gilt, folgt die Behauptung der Proposition per Induktion. Ansonsten gilt nach Lemma (4.1), dass  $H'_2$  die Menge  $\{u_2, u_3\}$  schneidet und

somit  $u_3 \in V(H'_2)$  gilt. Dann ist  $\{u, u_1, u_2, v_1\}$  ein 4-Trenner. Damit folgt die Behauptung der Proposition per Induktion. ■

**Proposition 4.7.** *Jeder Graph in  $\Gamma_4$  ist 4-regulär.*

**Beweis:** Angenommen es sei  $G \in \Gamma_4$ ,  $v \in V(G)$  und  $d(v) > 4$  (der Fall  $d(v) < 4$  gibt sofort einen Widerspruch zu  $G \in \Gamma_4$ ). Dann gilt nach Proposition (4.6), dass  $v$  einen Nachbarn  $u$  hat mit  $d(u) = 4$  und  $u$  hat einen Nachbar  $u'$  mit  $d(u') = 4$ .

Nach Lemma (4.1) hat  $G$  einen 4-Trenner  $A$ , welcher  $u$  und  $u'$  enthält. Es seien nun  $H_1$  und  $H_2$  zwei Komponenten von  $G - A$  und  $B$  der 4-Trenner, der  $u$  und  $u_2 \in N_G(u)$  enthält, wobei nach Proposition (4.6)  $u_i \in H_i$  Grad 4 hat mit  $i = 1, 2$ . Zudem sei  $u$  adjazent zu einer Ecke mit Grad 4 in jeder Komponente von  $G - B$ . Da  $d(v) > 4 = d(u)$  gilt, sind  $u_1$  und  $u'$  in unterschiedlichen Komponenten von  $G - B$  und  $u_1$  ist insbesondere nicht mit  $u'$  verbunden. Letzteres gilt analog für  $u'$  und  $u_2$ . Außerdem ist  $u$  adjazent zu  $u_1$  und einer adjazenten Ecke von  $u_1$ . Diese adjazente Ecke muss jedoch  $v$  sein, da  $d(u) = 4$ .

Damit gilt, dass  $v$  adjazent zu  $u_1$  und  $u_2$  ist. Deshalb liegt  $v$  in  $A$  mit  $v \neq u'$ . Da  $u_1$  und  $u'$  in unterschiedlichen Komponenten von  $G - B$  liegen, haben sie beide Grad 4 und sind adjazent zu einer Ecke von  $N(u)$ . Das heißt,  $u'$  ist adjazent zu  $v$ .

Wir haben nun gezeigt, dass für alle  $u$  aus  $N(v)$  mit  $d(u) = 4$  gilt, dass  $N(u) \subseteq N(v) \cup \{v\}$  ist. Des Weiteren wurde gezeigt, dass alle  $x$  aus  $N(u) - \{v\}$  Grad 4 haben. Die Komponente  $\tilde{H}$  von  $G - v$ , welche  $u$  enthält ist ein 3-regulärer Graph mit  $V(\tilde{H}) \subseteq N(v)$ .

Da  $v$  keine trennende Ecke ist, können wir annehmen, dass  $N(v) = V(G) - \{v\}$  gilt. Da  $G$  in  $\Gamma_4$  liegt, gilt  $G - v \in \Gamma_3$ . Dabei besteht nach Satz (2.1)  $\Gamma_3$  nur aus den  $K_4$ . Deswegen muss  $G = K_5$  sein.

Somit ist jedoch  $d(v) \leq 4$  was jedoch ein Widerspruch zur Annahme ist. Das bedeutet, dass  $\forall G \in \Gamma_4$  gilt, dass  $G$  4-regulär ist. ■

Mit diesen zwei Propositionen können wir nun das Theorem (4.5) beweisen.

**Beweis:** Wenn  $G$  ein 4-regulärer, 4-zusammenhängender Graph ist, bei denen alle Kanten in einem Dreieck liegen ist nichts zu zeigen.

Angenommen  $G$  sei in  $\Gamma_4$ . Dann folgt aus Proposition (4.7), dass  $G$  4-regulär ist. Es sei nun  $uv$  eine beliebige Kante von  $G$ .

Nach Lemma (4.1) existiert ein 4-Trenner  $A$ , welcher  $\{u, v\}$  enthält. Es seien die Ecken  $u, u_1, u'_1, u_2$  und  $u'_2$  in  $V(G)$  enthalten. Somit gilt mit Proposition (4.6), dass es die Dreiecke  $uu_1u'_1$  und  $uu_2u'_2$  so gibt, dass  $u_1$  und  $u_2$  in den unterschiedlichen Komponenten  $H_1$  und  $H_2$  von  $G - A$  liegen. Wir müssen nur noch zeigen, dass  $v$  entweder  $u'_1$  oder  $u'_2$  ist. Dazu nehmen wir an, dass  $v \neq u'_1$  und  $v \neq u'_2$  gilt.

Da  $d(u) = 4$  ist, folgt, dass  $u'_1 = u'_2$  in  $A - \{u, v\}$  liegt. Weil  $d(u'_1) = 4$  gilt und  $u'_1$  adjazent zu  $u$  ist, gilt, dass entweder  $u_1$  der einzige Nachbar von  $u_1$  in  $H_1$  ist oder das  $u_2$  der einzige

Nachbar von  $u'_2$  in  $H_2$  ist. Wir nehmen o.B.d.A an, dass  $u_1$  der einzige Nachbar von  $u_1$  in  $H_1$  ist (der andere Fall folgt analog).

Dann folgt, dass  $(A - \{u, u'_1\}) \cup \{u_1\}$  eine trennende Eckenmenge ist, solange  $H_1 \neq \{u_1\}$  ist. Da jedoch  $G$  4-zusammenhängend ist, gilt  $H_1 = \{u_1\}$ .

Somit liegt  $uv$  in einen  $K_3 \subseteq G$ . ■

In einer weiteren Arbeit von Martinov [5] bezüglich unkontrahierbarer 4-zusammenhängender Graphen benutzen wir Graphen, die zyklisch  $n$ -kantenzusammenhängend sind. Ein Graph ist **zyklisch  $n$ -kantenzusammenhängend** wenn für jede trennende Kantenmenge  $A$  mit  $|A| < n$  mindestens eine Komponente von  $G - A$  kreisfrei ist. Des Weiteren benötigen wir die Definition von quadratischen Pfaden. Zu einen Pfad  $P$  mit der Eckenmenge  $V(P) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{\ell}\}$  mit  $\ell \geq 0$  sei der quadratische Pfad  $P^2$  der Pfad, welcher alle Ecken durch Kanten verbindet, deren Abstand maximal 2 beträgt. Mit Hilfe der Menge zyklisch 4-Zusammenhängender Graphen können wir folgendes Theorem über  $\Gamma_4$  aufstellen.

**Theorem 4.8.** *Die Menge  $\Gamma_4$  enthält nur die Graphen  $C_n^2$  für  $n \geq 5$  und Kantengraphen von kubischen, zyklisch 4-zusammenhängenden Graphen.*

**Beweis:** Wir betrachten zuerst den Fall, dass  $G$  kubisch ist. Dann gilt, dass  $G$  genau dann zyklisch 4-zusammenhängend ist, wenn der Kantengraph  $L(G)$  4-zusammenhängend ist. Es sei  $L(G)$  4-zusammenhängend: Wir nehmen indirekt an, es existiert ein minimaler Trenner  $T \subseteq E(G)$  von  $G$  mit  $|T| \leq 3$  und die beiden Komponenten von  $G - T$  enthalten einen Kreis. Dann trennt  $T$  zwei Kanten  $e$  und  $f$  in  $G$ . Somit trennt jedoch  $T \subseteq V(L(G))$  die zwei Ecken  $e$  und  $f$  in  $L(G)$ , ein Widerspruch. Sei nun  $L(G)$  nicht 4-zusammenhängend. Dann existiert ein minimaler Trenner  $T \subseteq V(L(G))$  mit  $|T| \leq 3$  so, dass zwei Ecken  $e$  und  $f$  getrennt werden. Dann trennt jedoch  $T \subseteq E(G)$  die zwei Kanten  $e$  und  $f$  in  $G$ . Insbesondere hat  $G - T$  zwei Komponenten  $C$  und  $D$  mit  $e \in E(C)$  und  $f \in E(D)$ . Wir nehmen an, dass  $C$  aus einem Baum bestehe. Dann hätte  $C$  insbesondere zwei Blätter  $x$  und  $y$ . Wir betrachten jeweils die zwei inzidenten Kanten zu  $x$  und  $y$  (da  $G$  kubisch ist) die nicht in  $E(C)$  liegen. Diese Kanten liegen in dem Trenner  $T$  und es gilt  $|T| \geq 4$ , ein Widerspruch. Dies gilt analog für die Menge  $D$ . Somit enthalten beide Komponenten  $C$  und  $D$  einen Kreis. Daraus folgt, dass  $G$  nicht zyklisch 4-kantenzusammenhängend ist. Somit folgt nun daraus und aus Theorem (4.5), dass jeder kubische, zyklisch 4-zusammenhängende Graph in  $\Gamma_4$  ist. Aus Theorem (4.5) folgt zudem, dass  $C_n^2$  in  $\Gamma_4$  liegt.

Es sei nun  $G \in \Gamma_4$ . Wenn  $G$  keine Kante besitzt, die in zwei Dreiecken enthalten ist, so ist  $G$  der Kantengraph eines kubischen Graphen  $H$ . Da  $G$  4-zusammenhängend ist, ist  $H$  zyklisch 4-zusammenhängend.

Es sei nun  $u_1u_2$  eine Kante, welche in den zwei Dreiecken  $u_0u_1u_2$  und  $u_1u_2u_3$  enthalten ist. Somit enthält  $G$  den Pfad  $Q = u_0u_1u_2u_3$  und den quadratischen Pfad  $Q^2$ . Es sei  $P_K =$

$v_0v_1 \dots v_k$  ein maximaler Pfad so, dass  $P_K^2$  in  $G$  enthalten ist. Weiterhin sei  $x$  die Kante, welche inzident zu  $v_1$  ist, aber nicht in der Kantenmenge von  $P_K^2$  liegt. Da  $x$  in einem Dreieck enthalten ist, muss die inzidente Ecke  $v$ , welche nicht in  $P_K$  liegt, eine adjazente Ecke in  $P_K$  haben. Diese Ecke muss  $v_0, v_2$  oder  $v_3$  sein.

Angenommen  $v$  ist nicht adjazent zu  $v_0$ . Dann kann  $v$  nur noch adjazent zu  $v_2$  oder zu  $v_3$  adjazent sein.

Angenommen  $v$  ist zu  $v_2$  adjazent. Dann muss  $v$  auf dem Weg  $P_K$  liegen, da sonst  $v_2$  nicht mehr 4 regulär ist. Da  $v \neq v_0$  gilt, ist  $v = v_3$ . Dann gilt, dass  $\{v_0, v, v_4\}$  ein Seperator von  $G$  ist, da  $\{v_1, v_2\}$  von  $v_k$  getrennt wird. Dies ist aber ein Widerspruch zu  $G \in \Gamma_4$ . Wenn  $v$  nun adjazent zu  $v_3$  ist, folgt aus der Zusammenhangsannahme von  $G$ , dass  $v_3 v_{k-1}$  oder  $v_k$  sein muss. Im ersteren Fall würde jedoch ein 3-Seperator  $\{v_0, v, v_k\}$  entstehen, welcher  $\{v_1, v_2, v_3 = v_k - 1\}$  von den restlichen Ecken in  $G - P_K$  trennt ( $G - P_K$  enthält mindestens eine adjazente Ecke von  $v$ ). Dies ist ein Widerspruch zu  $G \in \Gamma_4$ .

Also müsste  $v_3 = v_k$  gelten. Dann existiert ein Pfad  $P = v_0v_2v_1v_3v$  mit  $|P| > |P_K|$  und  $P^2 \subseteq G$ , was jedoch ein Widerspruch zur Maximalität von  $P_K$  wäre. Somit kann  $v$  nicht adjazent zu  $v_3$  sein. Also ist  $v$  adjazent zu  $v_0$ . Da  $P_K$  maximal ist, gilt  $v = v_k$  wenn  $v_k$  adjazent zu  $v_0$  und  $v_1$  ist. Des Weiteren ist  $v_1$  adjazent zu  $v_k$  und  $v_k - 1$ . Somit wäre  $G = C_k^2$ . ■

Bereits Mader hat sich in seiner Arbeit „On  $k$ -Critically  $n$ -connected Graphs“ [4] mit diesen Resultaten beschäftigt. Er definierte die Graphenklasse  $C_n^2$  für  $n \geq 5$  mit  $H_m(2)$  für  $m \geq 5$ ,  $W_3(2) = L(K_{3,3})$  und den Kantengraphen von einem kubischen, zyklisch 4-kantenzusammenhängenden Graphen als  $L(K_{4,4}-1\text{-faktor})$ . Er bezeichnet die Klasse der endlichen 3-regulären, zyklisch 4-kantenzusammenhängenden Graphen mit  $M$  und betrachtet sich einen Graphen  $G \in M$ . Er definierte einen Algorithmus  $P$ , welcher aus jedem endlichen Graphen  $H$  mit den Eigenschaften von  $G$  sich aus den  $K_4$  gewinnen lässt, indem man folgende Operationen wiederholt anwendet:

- (1) Wähle 2 verschiedene Kanten  $k_1$  und  $k_2$  aus  $E(H)$
- (2) Unterteile  $k_i$  mit einer neuen Ecke  $z_i$  für  $i = 1, 2, z_1 \neq z_2$
- (3) füge Kante  $e = z_1z_2$  in den neuen Graphen hinzu.

Dabei müssen in jedem Schritt  $k_1$  und  $k_2$  **disjunkt** sein, das heißt, dass die beiden Kanten unterschiedliche inzidente Ecken besitzen. Insbesondere entspricht dieser Algorithmus der BG-Operation (3) aus Kapitel 3.2. Wir definieren nun spezielle kantenzusammenhängende Graphen. Ein Graph  $G$  ist  $(n + \frac{1}{2})$ -**kantenzusammenhängend** wenn  $G$  mindestens  $n$ -kantenzusammenhängend ist und für jeden Trenner  $T \subseteq E(G)$  mit  $|T| = 4$  gibt es eine Komponente  $C$  von  $G - T$  so, dass  $|C| = 1$ . Im Folgenden bezeichnen wir Graphen, die in  $M$  liegen und welche 3-kantenzusammenhängende und mindestens zyklisch



4-zusammenhängend sind, als  $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängende Graphen (da dies für kubi-sche Graphen äquivalent ist). Wir bezeichnen die Menge  $M$  als die Klasse aller endlichen, 3-regulären,  $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängende Graphen. Wir betrachten nun folgendes Theorem von Mader:

**Theorem 4.9.** *Jeder endliche, 3-reguläre,  $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängende Graph  $G$  entsteht aus einem  $K_4$  oder  $Q := K_{4,4}$ -1-Faktor durch wiederholte Anwendung von Algorithmus P.*

Bevor wir dieses Theorem beweisen, betrachten wir zwei Lemmas, die uns bei dem Beweis helfen. Im folgenden sei  $V(k) = \{x, y\}$  mit  $k = xy$  definiert. Außerdem wird eine Komponente  $C$  als trivial bezeichnet, wenn  $|C| = 1$  gilt.

**Lemma 4.10.** *Es sei  $G$  ein 3-regulärer, 3-kantenzusammenhängender Graph und  $T \subseteq E(G)$  ein Trenner mit  $|T| \leq 4$ . Dann hat  $G - T$  genau 2 Komponenten. Wenn  $|C| > 1$  eine Komponente von  $G - T$  ist mit  $|T| = 3$ , dann gilt, dass*

$$|V(C) \cap \bigcup_{k \in T} V(k)| = 3$$

*ist.*

**Beweis:** Es sei  $T \subseteq E(G)$  ein Trenner mit maximal 4 Elementen. Angenommen,  $G - T$  hätte mindestens 3 Komponenten. Der Graph  $\tilde{G}$  entstehe aus  $G$  durch Unterteilung der Kanten aus  $T$ . Es sei  $\tilde{T}$  die Menge dieser  $|T|$  Unterteilungsecken. Dann gilt insbesondere, dass jede Komponente von  $G - T$  eine Komponente von  $\tilde{G} - \tilde{T}$  ist. Außerdem besitzt jede Komponente von  $G - T$  in  $\tilde{G}$  mindestens 3 Nachbarn aus  $\tilde{T}$ . Somit sind die maximal 4 Ecken aus  $\tilde{T}$  mit 9 Kanten aus  $\tilde{G}$  inzident. Für die Ecken aus  $\tilde{T}$  gilt, dass sie zu  $2|T| = 8$  Kanten inzident sind, ein Widerspruch. Somit besitzt  $G - T$  genau zwei Komponenten. Wir betrachten nun die Komponenten  $C_1$  und  $C_2$  von  $G - T$  mit  $|T| = 3$ . Angenommen  $|V(C) \cap \bigcup_{k \in T} V(k)| < 3$ . Es seien  $k$  und  $k'$  zwei Kanten in  $T$  mit  $V(C) \cap V(k) \cap V(k') \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $x \in V(C) \cap V(k) \cap V(k')$ . Da  $|C| > 1$  gilt, existiert ein  $y \in V(C)$  so, dass  $x$  und  $y$  benachbart sind in  $C$ . Dann existiert jedoch ein Trenner  $T' = (T - \{k, k'\}) \cup \{xy\}$  welcher  $C - x$  von den restlichen Graphen  $G$  trennt, ein Widerspruch. ■

**Lemma 4.11.** *Es sei  $G \in M$ . Des Weiteren ist  $T \subseteq E(G)$  ein minimaler Trenner mit  $|T| = 4$ . Wenn  $C$  eine Komponente von  $G - T$  ist mit  $|V(C) \cap \bigcup_{k \in T} V(k)| \leq 3$ , dann hat  $C$  nur 2 Ecken.*

**Beweis:** Es sei  $T$  ein minimaler Trenner von  $G$  und  $G \in M$ . Da  $G$  3-regulär ist, gilt  $|C| \geq 2$ . Es sei  $z \in V(C)$ , wobei  $z$  inzident zu den Kanten  $k_1$  und  $k_2$  von  $T$  ist. Dann ist  $T' := ((E_G(z) \cup T) - \{k_1, k_2\})$  ein Trenner mit  $|T'| = 3$ . Nach den Voraussetzungen

ist  $G$  3-kantenzusammenhängend und zyklisch 4-kantenzusammenhängend und es gibt eine Komponente von  $G - T'$ , welche trivial ist. Das bedeutet jedoch, dass  $C - z$  trivial ist und somit gilt die Behauptung. ■

Wir beweisen nun das Theorem von Mader.

**Beweis:** Es sei nun  $G \in M$  mit  $|V(G)| \geq 5$ . Weiterhin sei  $k = x_1x_2 \in E(G)$  beliebig gewählt. Für  $i = 1, 2$  ist noch  $E_G(x_i) = \{k, k_i = x_iy_i, k'_i = x_iy'_i\}$  definiert.  $G$  hat dann wegen Theorem (4.8) keine Dreiecke. Dann ist  $\{y_1, y'_1\} \cap \{y_2, y'_2\} = \emptyset$  und  $e_i = y_iy'_i \notin E(G)$ . Wir betrachten nun die Umkehrung von dem Algorithmus  $P$ . Dazu betrachten wir einen Graphen  $G_k := (G - \{x_1, x_2\}) \cup \{e_1, e_2\}$ . Dieser ist immer noch 3-regulär. Für  $T \subseteq E(G_k)$  definieren wir  $P(T) \subseteq E(G) - \{k, k'_1, k'_2\}$  mit

$$P(T) - \{k_1, k_2\} = T - \{e_1, e_2\}$$

und  $k_i \in P(T)$  genau dann, wenn  $e_i \in T$  für  $i = 1, 2$  ist. Wenn  $T \subseteq E(G_k)$  eine trennende Kantenmenge von  $G_k$  ist, dann gilt, dass  $T' := P(T) \cup \{k\}$  eine trennende Kantenmenge von  $G$  ist und jede nichttriviale Komponente von  $G_k - T$  ist auch eine nichttriviale Komponente von  $G - T'$ . Somit gilt, dass  $G_k$  3-kantenzusammenhängend und 3-regulär ist. Angenommen,  $G_k$  ist nicht  $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängend, dann existiert ein 3-Trenner  $T \subseteq E(G_k)$  so, dass  $G_k - T$  keine isolierte Ecke hat, ein Widerspruch. Nach Lemma 4.10 sind die Kanten von  $T$  disjunkt und somit sind auch die Kanten von  $P(T)$  disjunkt. Damit sind auch die Kanten von  $T' := P(T) \cup \{k\}$  disjunkt. Aus der Konstruktion folgt zudem, dass  $|T'| = 4$  gilt. Nach Lemma 4.11 folgt nun, dass  $G - T'$  zwei nichttriviale Komponenten hat. Somit ist  $T'$  ein minimaler Trenner von  $G$ , da  $G$   $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängend ist.

Wir betrachten nun einen beliebigen Graphen  $G^* \in M$  und wenden auf diesen den Algorithmus  $P$  an. Angenommen,  $G$  ist dann nicht aus  $G^*$  konstruierbar mit Hilfe von  $P$ , dann gibt es für jede Kante  $k \in E(G)$  eine trennende Kantenmenge  $T_k$ , welche  $k$  enthält und bei der alle 4 Kanten disjunkt sind. Die Komponenten  $C_k^1$  und  $C_k^2$  von  $G - T_k$  sind nichttrivial und  $T_k$  ist eine minimale trennende Kantenmenge. Es sei  $L := \{C \mid C \text{ ist induzierter Untergraph von } G \text{ so, dass } E_G(C) \text{ aus 4 disjunkten Kanten besteht}\}$ . Wir wählen nun ein  $C$  aus  $L$  beliebig. Dann gilt, dass  $\lambda(C) \geq 2$  ist, da die Kanten von  $E_G(C)$  disjunkt sind und  $G$   $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängend ist. Es sei nun  $U \subseteq E(C)$  eine trennende Kantenmenge von  $C$  welche zwei disjunkte Kanten enthält.  $C'$  ist dann die Komponente von  $C - U$ , welche nur 4 Kanten enthält. Somit ist  $|E_G(C')| = 4$  und  $C' \in L$  oder es gilt nach Lemma (4.11), dass  $|C'| = 2$  ist. Wir wählen  $C_0^1 \in \min_{C \in L} C$ ,  $T_0 := E_G(C_0^1)$  und  $C_0^2 := G - V(C_0^1)$ . Dann ist auch  $C_0^2 \in L$  mit  $T_0$  als trennende Kantenmenge. Es sei nun  $k \in E(C_0^1)$  eine beliebig gewählte Kante. Es gilt dann, dass  $C_k^i \cap C_0^1 \neq \emptyset$  für  $i = 1, 2$  ist. Da  $C_0^1$  minimales Element von  $L$  ist, gilt weiterhin, dass  $C_k^i \cap C_0^2 \neq \emptyset$  für  $i = 1, 2$ . Daraus folgt nun, dass  $T_k \cap E(C_0^i)$  eine 2-elementige, trennende 2-elementige Kantenmenge von  $C_0^i$  für

$i = 1, 2$  ist. Die Komponenten von  $C_0^i - T_k$  sind dann  $C_0^i \cap C_k^1$  und  $C_0^i \cap C_k^2$ . Weiterhin gilt, dass  $|E_G(C_0^i \cap C_k^i)| = 4$  und  $C_0^i \cap C_k^i \in L$  oder  $|C_0^i \cap C_k^i| = 2$  für  $i = 1, 2$  ist. Da  $C_0^1$  minimal ist, gilt, dass  $|C_0^1 \cap C_k^i| = 2$  ist für  $i = 1, 2$ . Wir bezeichnen diese zwei Ecken mit  $x_1^i$  und  $x_2^i$ . Dann ist  $C_0^1$  ein Viereck, welches wie folgt definiert ist:

$$C_0^1 = (\{x_j^i \mid i, j \in \{1, 2\}\}, \{e^i = x_1^i x_2^i, e_i = x_i^1, x_i^2 \mid i \in \{1, 2\}\}).$$

Es seien nun  $f_j^i = x_j^i y_j^i$  für  $i, j \in \{1, 2\}$  die Kanten von  $E_G(x_j^i) \cap T_0$ . Wir betrachten nun für  $k' := x_1^1 x_2^1$  die Mengen  $T_{k'}, C_{k'}^1, C_{k'}^2$ . Dann ist insbesondere  $x_i^1 \in C_{k'}^i$  für  $i = 1, 2$ . Aus den Ergebnissen für  $T_k, C_k^1$  und  $C_k^2$  folgt nun, dass  $e_i \in E(C_{k'}^i)$ . Deshalb ist  $\{y_i^1, y_i^2\} \subseteq V(C_{k'}^i)$  und somit  $|E(C_{k'}^i \cap C_0^2) \cap T_k| = 1$  für  $i = 1, 2$  ist. Es sei  $E(C_{k'}^i \cap C_0^2) \cap T_k = \{k_i\}$ . Für  $T_{k'}$  gilt nun analog, dass  $E(C_k^i \cap C_0^2) \cap T_{k'} = \{k'_i\}$  für  $i = 1, 2$  ist.

Somit gilt nun, dass  $E_G(C_0^2 \cap C_k^i \cap C_{k'}^i) = \{f_j^i, k_j, k'_i\}$ . Da  $G$  ein  $\frac{7}{2}$ -kantenzusammenhängender Graph ist, enthält die Menge  $V_G(C_0^2 \cap C_k^i \cap C_{k'}^i)$  die Ecken  $\{y_j^i\}$  für  $i, j \in \{1, 2\}$ . Damit ist  $G = Q$ . ■

Nachdem wir nun die Menge der  $\Gamma_4$  genau definiert haben, können wir uns nun das Zertifikat betrachten.

## 4.2 Das Zertifikat für 4-Zusammenhang

Für den zertifizierenden Algorithmus versuchen wir, ähnlich wie beim 3-Zusammenhang, eine Kontraktionsfolge aufzustellen, die einem beliebigen Graphen  $G$  zu einem Graphen aus  $\Gamma_4$  reduziert. Dazu nehmen wir einen Graphen  $F$  aus  $\Gamma_4$  und stellen eine Expansionsfunktion  $exp$  auf, die in jedem Schritt einen speziellen Expansionsschritt auf  $F$  anwendet um am Ende den Graphen  $G$  oder einen zu  $G$  isomorphen Graphen darzustellen. Doch zuerst wollen wir uns die alternative Zertifikate betrachten. Dazu sei  $G$  ein beliebiger Graph mit  $|V(G)| \geq 5$ . Eine Möglichkeit besteht darin, jede nichtleere Menge  $X \subseteq V(G)$  zu betrachten und  $|N_G(X)| \geq 4$  oder  $N_G(X) \cup X = V(G)$  festzustellen. Ist dies der Fall, so ist der Graph 4-zusammenhängend. Dieses Vorgehen ist jedoch äußerst ineffizient, da man alle Eckenmenge und ihre Nachbarschaften betrachten muss. Eine weitere und bessere Möglichkeit ist die Anwendung von dem Satz von Menger. Diesen nehmen wir aus dem Buch von Diestel [1]

**Satz 4.12.** *Es sei  $G = (V(G), E(G))$  ein Graph und  $A, B \subseteq V(G)$ . Die kleinste Mächtigkeit einer  $A$  von  $B$  in  $G$  trennenden Eckenmenge ist gleich der größten Mächtigkeit einer Menge disjunkter  $A - B$ -Wege in  $G$ .*

Der Beweis für diesen Satz wird im Buch von Diestel [1] aufgeführt. Dieses Zertifikat ist effizienter als die Nachbarschaft jeder Ecke zu überprüfen, da wir hier anstatt alle Ecken

und Kanten nur die Wege betrachten müssen.

Wir wollen nun einen Algorithmus beschreiben, welcher den 4-Zusammenhang eines Graphen  $G$  zertifiziert. Das Zertifikat ist dabei eine Expansionsfolge. Dazu kontrahieren wir den Graphen  $G$  bis dieser in  $\Gamma_4$  liegt und speichern bei jeden Kontraktionsschritt die Nachbarschaft der kontrahierten Ecken ab. Wir definieren die Abbildung **exp** für jeden Expansionsschritt als eine Funktion

$$\text{exp}_1 : x_1 \xrightarrow{\omega_1} \Omega_1$$

die entweder eine Ecke  $x_1$  mit  $d(x_1) \geq 4$  auf eine Menge von Ecken  $\Omega_1$  oder eine Kante  $x_1$  wie folgt abbildet:

- (i)  $x_1$  ist eine Ecke,  $\Omega_1 = xy$  und  $\omega_1 = XY$  mit  $X \cup Y = N_G(x_1)$  und  $|X|, |Y| \geq 3$
- (ii)  $x_1$  ist eine Ecke,  $\Omega_1 = xyz$  und  $\omega_1 = XYZ$  mit  $X \cup Y \cup Z = N_G(x_1)$  und  $|X|, |Y|, |Z| \geq 2$ . Zudem muss gelten  $|X \cup Y| \geq 3$ ,  $|X \cup Z| \geq 3$  und  $|Y \cup Z| \geq 3$ .
- (iii)  $x_1$  ist eine Kante,  $\Omega_1 = \emptyset$  und  $\omega_1 = xy$ , wobei die Kante  $x_1$  zwischen den Ecken  $x$  und  $y$  hinzugefügt wird.

Wir wollen nun zeigen, dass (i) – (iii) den 4-Zusammenhang erhalten.

**Lemma 4.13.** *Es sei  $G$  ein 4-zusammenhängender Graph. Der Graph  $G'$ , welcher aus der Anwendung einer der Operationen (i) – (iii) aus  $G$  entsteht, ist 4-zusammenhängend.*

**Beweis:** Es sei  $x_1$  eine Ecke aus  $V(G)$ . Für die Operation (iii) ist nichts zu zeigen, da das Hinzufügen einer Kante  $e = xy$  die Zusammenhangszahl offensichtlich nicht verringert. Wendet man (i) auf eine Ecke  $x_1$  an, für die die Voraussetzungen gilt, entsteht eine neue Ecke  $y$  und eine Kante  $e = xy$ , so dass  $d_{G'}(y) \geq 4$ . Angenommen,  $G'$  wäre nicht 4-zusammenhängend. Dann entsteht in  $G'$  eine minimale trennende Eckenmenge  $T$  mit weniger als 4 Ecken. Da es in  $G$  zwischen allen Ecken  $v, w \in V(G) - \{x, y\}$  4 offendisjunkte Wege gibt, existieren diese Wege auch in  $G'$ . Insbesondere gibt es dann eine Komponente von  $G - T$ , welche alle Ecken  $v \in V(G') - (T \cup \{x, y\})$  enthält. Somit existiert eine Komponente  $C$  von  $G' - T$ , für die gilt, dass  $C \subseteq \{x, y\}$  ist. Insbesondere muss  $T = N_{G'}(C)$  gelten. Jedoch gilt für alle nichtleeren Teilmengen  $C$  von  $\{x, y\}$ , dass  $|N_{G'}(C)| \geq 4$  ist, ein Widerspruch. Somit ist  $G'$  4-zusammenhängend. Wendet man (ii) auf eine Ecke  $x_1$  an, für die die Voraussetzungen gilt, dann entsteht ein Dreiecke  $xyz$  mit  $d_{G'}(x) \geq 2$ ,  $d_{G'}(y) \geq 2$  und  $d_{G'}(z) \geq 2$ . Angenommen  $G'$  wäre nicht 4-zusammenhängend. Dann entsteht in  $G'$  eine minimale trennende Eckenmenge  $T$  mit weniger als 4 Ecken. Da es zwischen allen Ecken  $v \in V(G) - \{x, y, z\}$  4 offendisjunkte Wege gibt, existieren diese auch in  $G'$ . Insbesondere sind dann alle Ecken  $v \in V(G') - (T \cup \{x, y, z\})$  in der gleichen Komponente  $C$  von  $G' - T$  enthalten. Somit existiert eine Komponente  $D \subseteq \{x, y, z\}$  von  $G' - T$ . Da  $T = N_{G'}(D)$  ist, gilt, dass  $|T| = |N_{G'}(D)| \geq 4$  ist, ein Widerspruch. Somit ist  $G'$  4-zusammenhängend. ■

Wir haben nun eine Expansionsfunktion definiert, welche einen 4-zusammenhängenden Graphen  $G$  vergrößert ohne dass die Zusammenhangszahl kleiner wird. Wir können nun einen Algorithmus definieren, welcher aus der Menge der kontraktionskritischen 4-zusammenhängenden Graphen  $\Gamma_4$  einen Graphen bestimmt und dann in jeden Schritt auf diesem eine der drei Formen von der Expansionsfunktion anwendet bis der gesuchte Graph  $G$  entsteht. Dafür wird zunächst entweder eine kontrahierbare Kante oder ein Dreieck kontrahiert. Dazu betrachten wir folgendes Lemma zur Dreieckskontraktion:

**Lemma 4.14.** *Es sei  $G \in \Gamma_4$ , wobei  $G \neq C_n^2$  ist. Es sei  $\{x, y, z\} \subseteq V(G)$  ein Dreieck in  $G$ . Dann ist der Graph  $\tilde{G} = G/\{x, y, z\}$  4-zusammenhängend.*

**Beweis:** Es sei  $A$  das Dreieck aus den Ecken  $x, y$  und  $z$  in  $G$ .

Es gilt, dass  $N(x) - A$ ,  $N(y) - A$  und  $N(z) - A$  paarweise disjunkt sind (sonst gäbe es einen 3-elementigen Trenner in  $G$ , welcher  $x, y$  und  $z$  von den Graphen  $G - (T \cup A)$  trennt). Es entstehe  $\tilde{G}$  aus  $G$  durch Kontraktion des Dreiecks  $A$  auf die Ecke  $v_{x,y,z}$ . Es seien  $a, b$  zwei Ecken, welche in  $\tilde{G} - \{v_{x,y,z}\}$  liegen. Insbesondere gilt, dass  $a, b \in V(G) - \{x, y, z\}$  ist. In  $G$  gibt es dann 4 offendisjunkte, induzierte  $a, b$ -Wege wobei keiner dieser Wege nur genau eine Ecke des Dreiecks enthält. Enthielte ein solcher Weg  $P$  nur eine Ecke  $x$  aus  $A$ , so enthielte  $P$  auch die Ecken  $p$  und  $q$  aus der Nachbarschaft von  $x$  und somit auch die Kante  $e = pq$ . Dann wäre jedoch  $P - \{a\}$  ein kürzerer  $a, b$ -Weg, ein Widerspruch. Somit enthält das Dreieck  $A$  höchstens einen der  $a, b$ -Wege. Damit existieren jedoch auch in  $\tilde{G}$  4 offendisjunkte  $a, b$ -Wege. Somit ist  $\tilde{G}$  4-zusammenhängend. ■

Wir können nun folgenden Algorithmus aufstellen: Es sei  $G$  ein beliebiger Graph mit Eckenmenge  $V(G)$  und Kantenmenge  $E(G)$

- (i) Entferne alle parallele Kanten aus  $G$
- (ii) Überprüfe, ob es in  $G$  eine 3 elementige trennende Eckenmenge gibt. Ist dies der Fall, so ist der Graph nicht 4-zusammenhängend. Ansonsten gehe zu Schritt (iii)
- (iii) Überprüfe ob  $G \in \Gamma_4$  liegt. Ist dies nicht der Fall, so existiert in  $G$  mindestens eine kontrahierbare Kante  $e = xy$ . Dann gehe zu Schritt (iv) ansonsten gehe zu Schritt (v).
- (iv) Kontrahiere eine kontrahierbare Kante  $e = xy \in E(G)$  und speichere den neuen Graphen  $\tilde{G} = G - e$  ab. Solange  $\tilde{G} \notin \Gamma_4$  gehe zu Schritt (iii). Ansonsten gehe zu Schritt (v). Speichere zusätzlich vor jeder Kontraktion die Nachbarschaft  $N(x)$  und  $N(y)$  ab.
- (v) Überprüfe, ob es in  $G$  ein Dreieck  $uvw$  gibt. Ist dies der Fall und es gilt, dass  $G \neq C_n^2$  ist, so kontrahiere dieses, speichere die Nachbarschaften  $N(u)$ ,  $N(v)$  und  $N(w)$  ab und gehe zu Schritt (iii). Ansonsten gehe zu Schritt (vi).

- (vi) Wende auf  $G'$  so lange eine Form der Funktion *exp* an, bis  $G' = G$  gilt. Verwende dabei die Abgespeicherten Nachbarschaften um alle Kanten wieder aufzunehmen. Speichere in jeden Schritt die Expansion ab und gebe diese als Expansionsfolge aus.

Wir versuchen nun im folgenden, ein möglichst kleines Zertifikat zu finden. Um dies zu bewirken wird vor den Schritt (ii) der Graph zuerst minimalisiert. Dazu verwenden wir den Algorithmus von Nagamochi-Ibaraki aus der Arbeit „A linear-time algorithm for finding a sparse  $k$ -connected spanning subgraph of a  $k$ -connected graph.“ [8]:

Der Algorithmus sieht dann wie folgt aus:

- (i) Entferne alle parallelen Kanten aus  $G$
- (ii) Überprüfe, ob es in  $G$  eine 3 elementige trennende Eckenmenge gibt. Ist dies der Fall, so ist der Graph nicht 4-zusammenhängend. Ansonsten gehe zu Schritt (iii)
- (iii) Überprüfe für alle Kanten  $e \in E(G)$  den Graphen  $G - e$  auf 3-Zusammenhang. Ist  $G - e$  3-zusammenhängend, so lösche  $e$  in den Graphen  $G$  nicht. Verwende dazu den Algorithmus von Nagamochi-Ibaraki. Gehe dann zu Schritt (iv).
- (iv) Überprüfe ob  $G \in \Gamma_4$  liegt. Ist dies nicht der Fall, so existiert in  $G$  mindestens eine kontrahierbare Kante  $e = xy$ . Dann gehe zu Schritt (v) ansonsten gehe zu Schritt (vi).
- (v) Kontrahiere eine kontrahierbare Kante  $e = xy \in E(G)$  und speichere den neuen Graphen  $\tilde{G} = G - e$  ab. Solange  $\tilde{G} \notin \Gamma_4$  gehe zu Schritt (iii). Ansonsten gehe zu Schritt (vii). Speichere zusätzlich vor jeder Kontraktion die Nachbarschaft  $N(x)$  und  $N(y)$  ab.
- (vi) Überprüfe, ob es in  $G$  ein Dreieck  $uvw$  gibt. Ist dies der Fall und es gilt, dass  $G \neq C_n^2$  ist, so kontrahiere dieses, speichere die Nachbarschaften  $N(u)$ ,  $N(v)$  und  $N(w)$  ab und gehe zu Schritt (iii). Ansonsten gehe zu Schritt (vii).
- (vii) Wende auf  $G'$  so lange eine Form der Funktion *exp* an, bis  $G' = G$  gilt. Verwende dabei die Abgespeicherten Nachbarschaften um alle Kanten wieder aufzunehmen. Speichere die Expansionschritte ab und gebe diese als Expansionsfolge aus.

Dies ist ein zertifizierender Algorithmus, welcher entweder ausgibt, dass  $G$  nicht 4-zusammenhängend ist oder eine Expansionsfolge ausgibt, welche den 4-Zusammenhang zertifiziert. Das Problem besteht nun darin die löschbare Kante zu löschen ohne das Ecken von Grad 3 entstehen. Zudem gibt es Graphen mit vielen Kanten, bei denen man keine Kante löschen kann, da sonst der Zusammenhang sinken würde. Ein Beispiel dafür ist der  $K_{4,200}$ .

Ein weiteres Problem ist das Auffinden einer kontrahierbaren Kante in  $G$ . Ansonsten ist eine Kontraktion und die Abspeicherung des Graphens in jeden Schritt nicht effizient. Somit

ist dieser Algorithmus, welcher die Ergebnisse von Martinov und Mader verwendet kein geeigneter Algorithmus zur Zerifizierung des 4-Zusammenhangs eines Graphen  $G$ .

Wir wollen dennoch ein Beispiel machen, bei dem wir diesen Algorithmus anwenden: Wir betrachten zunächst den Petersengraphen. Zuerst bilden wir den Kantengraphen von den Petersengraphen. Dann erhalten wir die folgende Abbildung 4.1:

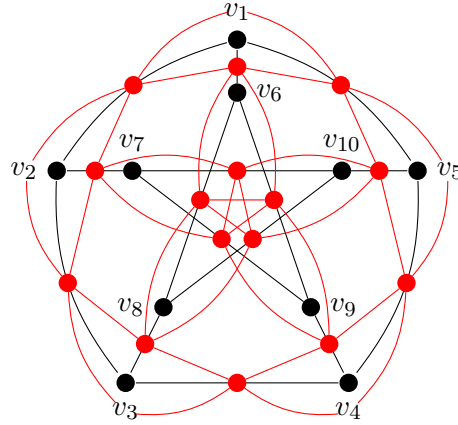


Abbildung 4.1: Der Petersengraph  $G$  (schwarze Ecken und Kanten) und sein Kantengraph  $L(G)$  (rote Ecken und Kanten)

Nun löschen wir die Ecken und Kanten des Petersengraphen aus den Bild 4.1 und erhalten den Ausgangsgraphen, welchen wir bearbeiten wollen. Diesen sieht man in der Abbildung 4.2. In diesem Graphen können wir keine einzelne Kante kontrahieren. Da er jedoch Dreiecke besitzt, können wir dieses kontrahieren, da  $L(G) \neq C_{15}^2$  gilt. Wir kontrahieren das Dreieck  $\{v_1, v_{10}, v_7\}$ . Es entsteht der Graph aus Abbildung 4.3. Wir speichern folgende Nachbarschaft ab:

$$A = N(v_1) = \{v_2, v_3\},$$

$$B = N(v_{10}) = \{v_{13}, v_{15}\},$$

$$C = N(v_7) = \{v_8, v_9\},$$

Nun kontrahieren wir die Kante  $e_2 = v_8 v_9$ . (siehe dazu Abbildung 4.5). Dabei speichern wir die Nachbarschaften

$$D = N(v_8) = \{v_{11}, v_{14}, v_3 v_{v_1, v_7, v_{10}}\},$$

$$E = N(v_9) = \{v_5, v_6, v_{v_1, v_7, v_{10}}\}$$

ab. Nun entstehen die kontrahierbaren Kanten  $e_3 = v_4 v_5$  und  $e_4 = v_5 v_6$ . Wir kontrahieren zunächst die Kante  $e_3$ . Dafür speichern wir die Nachbarschaften

$$F = N(v_4) = \{v_{13}, v_{14}, v_{v_2, v_3}\},$$

$$G = N(v_5) = \{v_6, v_{v_8 v_9}, v_{v_2, v_3}\}$$

ab. Es entsteht der Graph aus Abbildung 4.6. Nun entsteht die unwesentliche Kante  $e_5 = v_{v_4, v_5} v_{v_8, v_9}$ . Diese wird dann gelöscht. Dann entsteht der Graph aus der Abbildung 4.7 Der

Graph aus Abbildung 4.8 ist isomorph zu den Graphen aus Abbildung 4.7. Zur Veranschaulichung arbeiten wir mit der Abbildung 4.8 weiter. Wendet man an der Stelle den Algorithmus weiter an, so entsteht der  $C_6^2$  wie unten zu sehen ist. Des Weiteren hat man eine Expansionsfolge mit der Hilfe der Nachbarschaften gefunden, so dass der  $C_6^2$  zu den Graphen  $L(G)$  expandiert wird. Dadurch ist  $L(G)$  4-zusammenhängend.

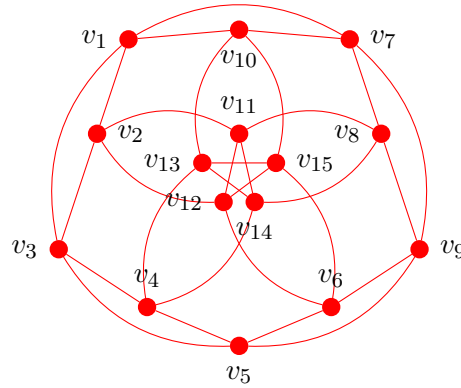


Abbildung 4.2: Der Kantengraph  $L(G)$  von dem Petersen-Graphen  $G$  aus der Abbildung 4.1

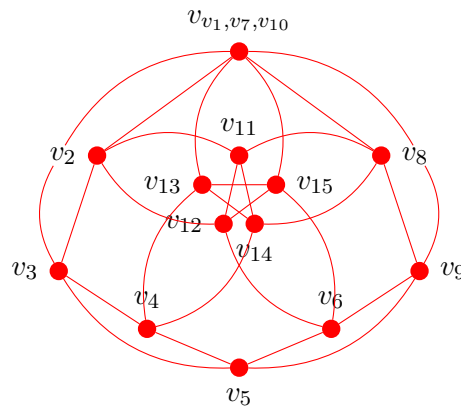


Abbildung 4.3: Kontraktion des Dreiecks  $\{v_1, v_7, v_{10}\}$ .



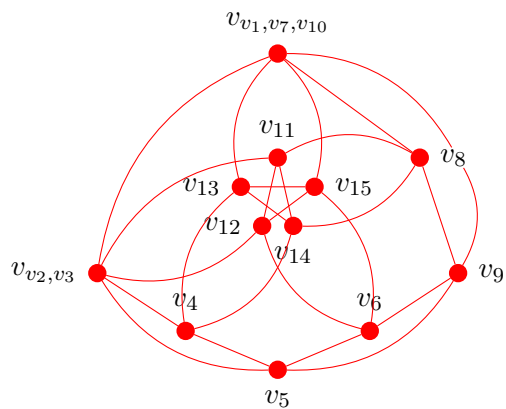


Abbildung 4.4: Kontraktion der Kante  $e_1 = v_2v_3$

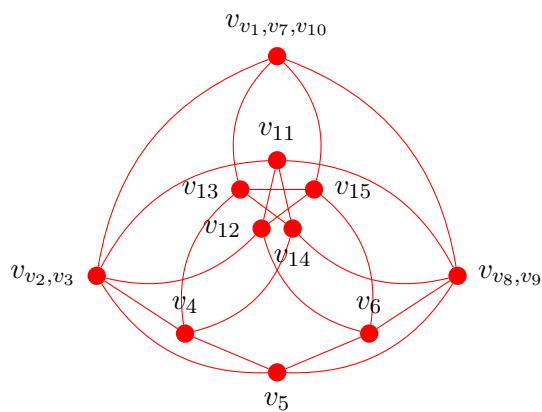


Abbildung 4.5: Kontraktion der Kante  $e_2 = v_8v_9$

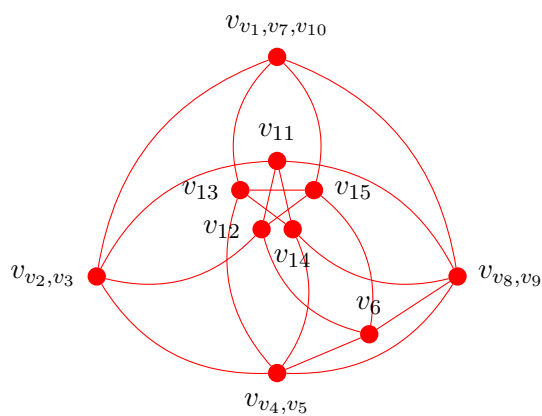


Abbildung 4.6: Kontraktion der Kante  $e_3 = v_4v_5$

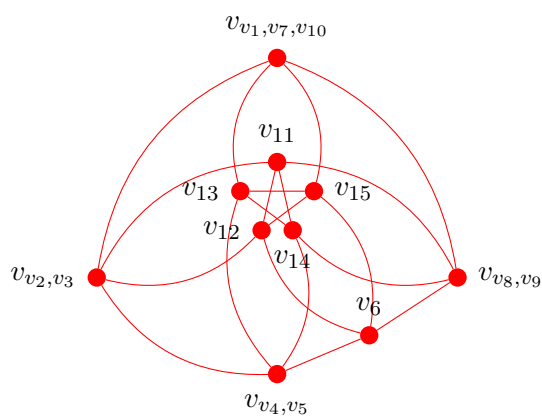
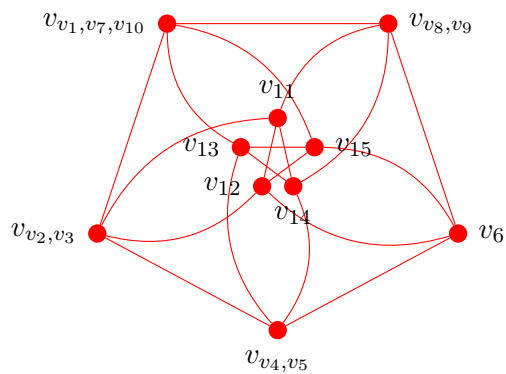
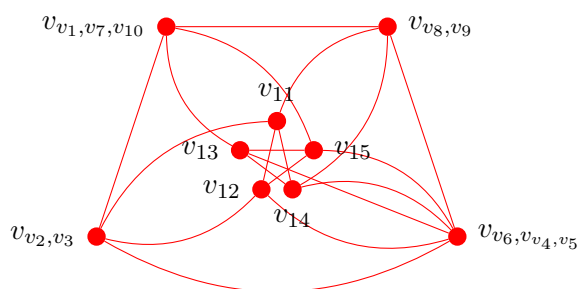

 Abbildung 4.7: Löschen der unwesentlichen Kante  $e_5 = v_{v_4, v_5} v_{v_8, v_9}$ .


Abbildung 4.8: Der isomorphe Graph zu Abbildung 4.7


 Abbildung 4.9: Kontraktion der Kante  $\{v_6 v_{v_4, v_5}\}$

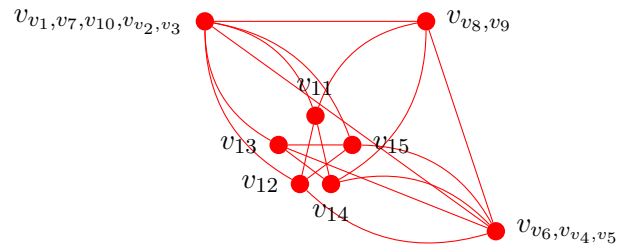


Abbildung 4.10: Kontraktion der Kante  $\{v_{v_2, v_3} v_{v_1, v_7, v_{10}}\}$

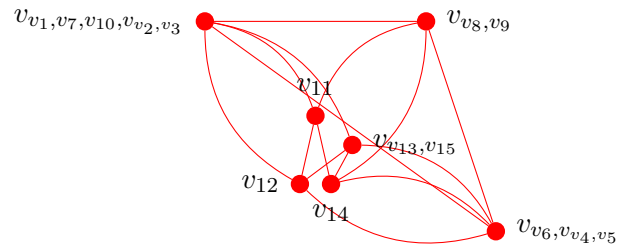


Abbildung 4.11: Kontraktion der Kante  $\{v_{13} v_{15}\}$

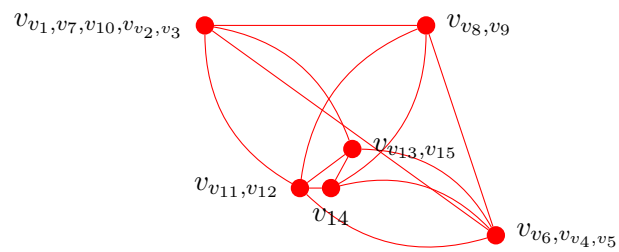


Abbildung 4.12: Kontraktion der Kante  $\{v_{11} v_{12}\}$

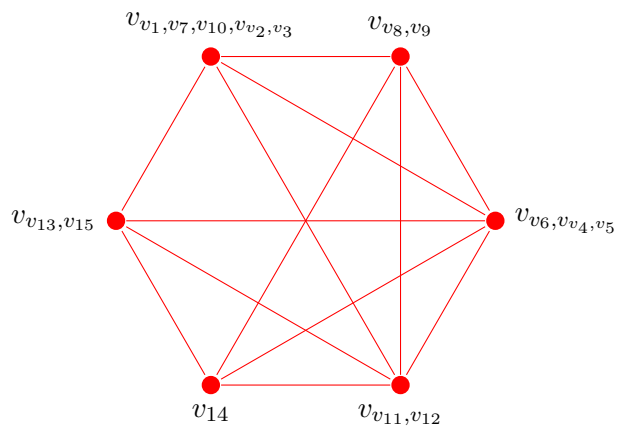


Abbildung 4.13: Der isomorphe Graph zur Abbildung 4.12

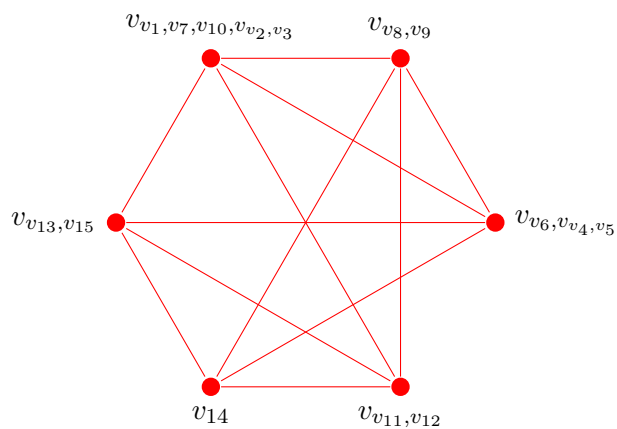


Abbildung 4.14: Durch entfernen der unwesentlichen Kante  $\{v_{v_{11}, v_{12}} v_{v_6, v_{v_4, v_5}}\}$  entsteht der Graph  $C_6^2$ .

# Kapitel 5

## Ergebnisse und Ausblick

---

Im letzten Kapitel dieser Arbeit fassen wir noch einmal kurz das Ergebniss dieser Arbeit zusammen. Dabei wird auf die Probleme eingegangen, die dieses mit sich bringen. Des Weiteren werden Lösungsansätze gebracht, mit denen man versuchen kann, dieses Problem noch einmal zu lösen.

### 5.1 Ergebnisse

In dieser Arbeit wurden zunächst die Ergebnisse von Schmidt zu den Zertifikaten für 3-zusammenhängende Graphen betrachtet. Dabei interessierte uns besonders das Zertifikat aus der Arbeit [10]. Darauf aufbauend wurde versucht, mithilfe der Ergebnisse der Arbeiten von Martinov [5], [6] und der von Mader [4] einen Algorithmus zu definieren, der ein Zertifikat für den 4-Zusammenhang eines Graphen beschreibt. Dabei ist ein zertifizierender Algorithmus entstanden, welcher uns zwar ein Zertifikat liefert, jedoch ist dieses aus Gründen, welche schon in Kapitel 4.2 angebracht wurden, ungeeignet.

### 5.2 Ausblick

Das Problem der Zeiteffizienz kann durch eine Definition der BG-Pfade für 4-zusammenhängende möglicherweise gelöst werden. Dazu bräuchte man eine Definition von der BG-Operation (2) aus Abbildung (3.3) und der BG-Operation (3) aus Abbildung (3.4) für 4-zusammenhängende Graphen. Diese könnten insofern funktionieren, dass man sich in den Graphen einen Kreis sucht, auf dem man die BG-Operation (3) solange ausführt, bis der komplette Kreis kontrahiert wurde. Das bedeutet, man definiert sich nicht eine einzelne Operation sondern eine Folge von Operationen, welche nacheinander ausgeführt werden, damit der Graph seinen Zusammenhang nicht verliert. Somit könnte man auch das Problem von der Löschung einer Kante in einen 4-zusammenhängenden Graphen lösen.

# Literaturverzeichnis

---

- [1] DIESTEL, R. , *Graphentheorie* Springer-Lehrbuch Masterclass, 4th ed. (2010). 2, 33
- [2] EDMONDS, J. und JOHNSON, E.L. , Matching: A Well-Solved Class of Integer Linear-Programs. Combinatorial Optimization — Eureka, You Shrink! (2003), 27-30.
- [3] ELMASRY, A., MEHLHORN, K., und SCHMIDT, J. M. , An  $O(m+n)$  Certifying Triconnectivity Algorithm for Hamiltonian Graphs. Algorithmica 62 (2012), 754-766. 1, 7, 11
- [4] MADER, W. , On  $k$ -Critically  $n$ -Connected Graphs.. Progress in graph theory, Proc. Conf. Combinatorics, Waterloo/Ont. 1982, 389-398 (1984). 1, 5, 30, 43
- [5] MARTINOV, N. , Uncontractable 4-connected graphs. Journal of Graph Theory 6 (1982), 343-344. 1, 29, 43
- [6] MARTINOV, N. , A recursive characterization of the 4-connected graphs. Discrete Mathematics 84 (1990), 105-108. 1, 24, 43
- [7] MCCONNELL, R. M., MEHLHORN, K., NÄHER, S., SCHWEITZER, P. , Certifying Algorithms. Comput. Sci. Rev. 5, No. 2, 119-161 (2011). 1, 6
- [8] NAGAMACHI, H., IBARAKI, T. , A linear-time algorithm for finding a sparse  $k$ -connected spanning subgraph of a  $k$ -connected graph.. Algorithmica, 7(5 & 6), pages 583–596 (1992). 36
- [9] SCHMIDT, J. M. , Contractions, Removals, and Certifying 3-Connectivity in Linear Time. SIAM Journal on Computing, 42(2), pages 494-535, 2013. 18, 20, 23
- [10] SCHMIDT, J. M. , Structure and Constructions of 3-Connected Graphs., Dissertation, Freie Universität Berlin, 2010. 1, 11, 15, 16, 23, 43
- [11] TUTTE, W. , A theory of 3-connected graphs. Indag. Math., 23:441–455, 1961. 8